臺北市立松山高級中學 111 學年度第二學期 開學考

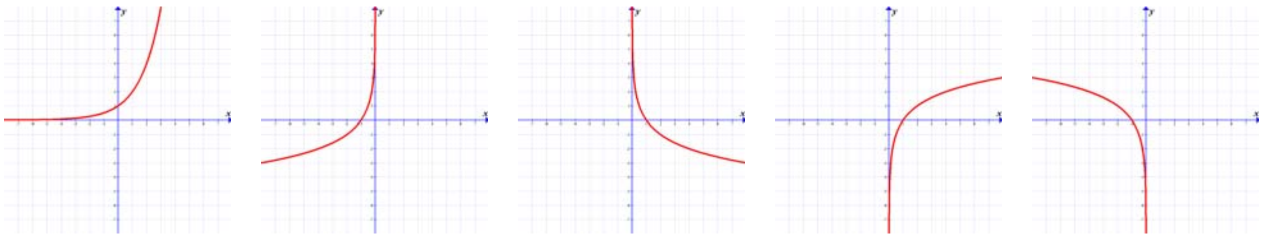
二年級 數學 A 試題卷

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題 6 分。每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。請將正確選項劃記在答案卡上。

(　　　　) 1. 在坐標平面上，將 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形以 x 軸為對稱軸，作出線對稱圖形 Γ_1；再將 Γ_1 以 $y=x$ 為對稱軸，作出線對稱圖形 Γ_2。試問 Γ_2 應為下列何者？

(1)　(2)　(3)　(4)　(5)



(　　　　) 2. 在坐標平面上，將 $y=\sin x$ 的圖形以 y 軸為中心，水平伸縮 2 倍；接著再向右平移 π 單位，會得到哪一個函數的圖形？

(1) $y=\sin(2x-2\pi)$　(2) $y=\sin(2x-\pi)$　(3) $y=\sin(2x-\frac{\pi}{2})$

(4) $y=\sin(\frac{x}{2}-\pi)$　(5) $y=\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$

(　　　　) 3. 解不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)>\log_{\frac{1}{3}}(7-2x)$，可求得 x 的解為下列何者？

(1) $x<3$　(2) $x>3$　(3) $2<x<\frac{7}{2}$　(4) $2<x<3$　(5) $\frac{7}{2}<x<3$

(　　　　) 4. 坐標平面上 O 為原點，設 $\vec{u}=(1,2)$、$\vec{v}=(3,4)$。令 Ω 為滿足 $\overrightarrow{OP}=x\vec{u}+y\vec{v}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $\frac{1}{2}\le x\le 1$ 、$-3\le y\le 2$，則 Ω 的面積為多少平方單位？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5

(　　　　　) 5. 下列各選項中，哪一個的值最大？

(1) $\begin{vmatrix} \cos 31^\circ & -\sin 31^\circ \\ \sin 31^\circ & \cos 31^\circ \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} \cos 31^\circ & \sin 31^\circ \\ \sin 29^\circ & \cos 29^\circ \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} \sin 31^\circ & \cos 31^\circ \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_4 5 \\ \log_5 8 & \log_3 4 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 53\sqrt{7} & 106\sqrt{7} \\ 78\sqrt{2} & 156\sqrt{2} \end{vmatrix}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 6 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 10 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。請將正確選項劃記在答案卡上。

(　　　　　) 6. 下列各方程式中，試選出有實數解的選項。(自然常數 $e \approx 2.71828$)

(1) $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$　(2) $\tan x + 10000000 = 0$　(3) $x - \log x = 0$

(4) $\sin x = e^x + 1$　(5) $2^{-x} = \log(x-2)$。

(　　　　　) 7. 下列關於函數及其圖形的特性，試選出正確的選項。

(1) $y = 3^x$ 是嚴格遞增函數

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形凹口向下

(3) 直線 $x = \pi$ 是 $y = \cos x$ 圖形的一條對稱軸

(4) 直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 是 $y = \tan x$ 圖形的一條鉛直漸近線

(5) $y = \sin(2x)$ 的週期為 π。

(　　　　　) 8. 在坐標平面上，設 $A(2, 1), B(-2, 3), C(0, -1)$，$\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為 $\vec{u}$。

下列敘述中，試選出正確的選項。

(1) A, B, C 三點共線

(2) $\triangle ABC$ 的重心為 $G(0, 1)$

(3) $\cos\angle ABC = -\dfrac{4}{5}$

(4) 點 A 到直線 BC 的距離為 $|\overrightarrow{BA} - \vec{u}|$

(5) 設點 A 在直線 BC 上的投影點為 D，則 $\overrightarrow{BD} = \vec{u}$。

(　　　　) 9. 設 k 為實數，向量 $\vec{a}=\begin{bmatrix}k+1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}4\\k-2\end{bmatrix}$, $\vec{c}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$，下列關於二元一次聯立方程組

$$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$$

以及上述三個向量的敘述，試選出正確的選項。

(1) 當 $k\neq 3$ 且 $k\neq -2$ 時，聯立方程組恰有一組解 $(x,y)=(\dfrac{4}{k+2},\ \dfrac{1}{k+2})$

(2) 當 $k\neq 3$ 且 $k\neq -2$ 時，兩向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 互相平行，即 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$

(3) 當 $k=3$ 時，聯立方程組有無限多組解 $(x,y)=(t,1-t)$，其中 t 是實數

(4) 當 $k\neq 3$ 時，兩向量 $\vec{a}, \vec{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 $|k-3|$

(5) 當 $k>3$ 時，若聯立方程組的解為 (x,y)，則 $x=\dfrac{\vec{b},\vec{c}\text{ 所張的平行四邊形面積}}{\vec{a},\vec{b}\text{ 所張的平行四邊形面積}}$ 。

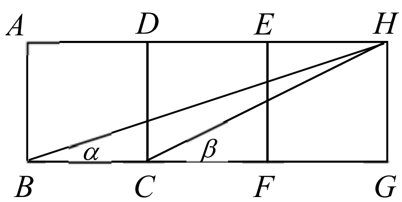
三、選填題（占 30 分）

說明：第 10 題至第 14 題，每題有若干空格，各空格可能填入 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, –, ± 這些數字或符號其中一者。各題中之空格皆填答正確給 6 分，答錯或未完全答對不給分。請將答案劃記至答案卡。

10. 試求 $\cos\dfrac{5\pi}{6}\tan\dfrac{2\pi}{3}+\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos\dfrac{7\pi}{4}=$ __⑩__ 。

11. 如右圖所示，已知 $ABCD$, $CDEF$, $EFGH$ 皆為正方形，

其中 $\angle HBG=\alpha, \angle HCG=\beta$， 則 $\tan(\alpha+\beta)=$ __⑪__ 。



12. 解方程式 $\log_3(x^2+2x)=\log_3(2+x)+1$ 得 $x=$ 12 。

13. 平面上，設向量 $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$，若非零向量 $\vec{u}$ 滿足 $\vec{u}\parallel(2\vec{a}-3\vec{b})$ 且 $\vec{u}\perp(t\vec{a}-8\vec{b})$，則實數 $t=$ 13 。

14. 在坐標平面上，若點 $P(x,y)$ 為直線 L: $3x+4y=5$ 上的動點，則 x^2+y^2 的最小值為 14 。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. ΔABC的正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （R為ΔABC外接圓半徑）

   ΔABC的餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$, $\sqrt{6}\approx 2.449$, $\pi\approx 3.14159$, $e\approx 2.71828$

5. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$, $\log 3\approx 0.4771$, $\log 7\approx 0.8451$

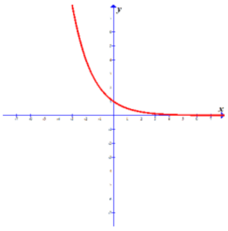
111-1 高二下 數學 A 開學考 參考解析

一、單選題（占 30 分）

1	2	3	4	5
2	5	4	5	3

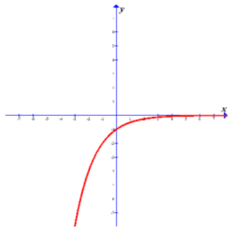
1. 依題意可依序繪出下面的圖形，答案選 **(2)**

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



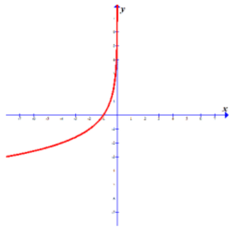
以 x 軸為對稱軸

$y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



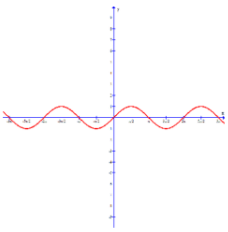
以 $y=x$ 為對稱軸

$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$



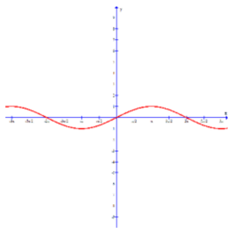
2. 將題意可依序繪出下面的圖形，答案選 **(5)**

$y=\sin x$



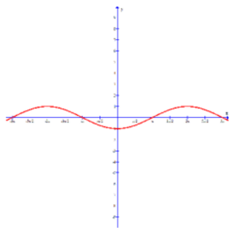
y 軸為中心伸縮 2 倍

$y=\sin\dfrac{x}{2}$



向右平移 π 單位

$y=\sin\dfrac{x-\pi}{2}$



3. 對數有意義可知「真數」為正，有 $x-2>0$ 且 $7-2x>0$，先得 $2<x<\dfrac{7}{2}$

又底數 $\dfrac{1}{3}<1$，於是 $x-2<7-2x$，解得 $x<3$。綜合而得 **(4)** $2<x<3$。

4. 所求 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)(2-(-3))\left|\,\begin{vmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{vmatrix}\,\right|=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)(2-(-3))\left|\,\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}\,\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot|4-6|=5$ 選 **(5)**。

5. (1) $\begin{vmatrix}\cos 31^\circ & -\sin 31^\circ\\ \sin 31^\circ & \cos 31^\circ\end{vmatrix}=\cos 31^\circ\cos 31^\circ-(-\sin 31^\circ)\sin 31^\circ=\cos^2 31^\circ+\sin^2 31^\circ=1$

(2) $\begin{vmatrix}\cos 31^\circ & \sin 31^\circ\\ \sin 29^\circ & \cos 29^\circ\end{vmatrix}=\cos 31^\circ\cos 29^\circ-\sin 31^\circ\sin 29^\circ=\cos(31^\circ+29^\circ)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(3) $\begin{vmatrix}\sin 31^\circ & \cos 31^\circ\\ -1 & 1\end{vmatrix}=\sin 31^\circ-(-\cos 31^\circ)=\sin 31^\circ+\cos 31^\circ=\sqrt{2}\sin 76^\circ$

(4) $\begin{vmatrix}\log_2 3 & \log_4 5\\ \log_5 8 & \log_3 4\end{vmatrix}=\log_2 3\log_3 4-\log_4 5\log_5 8=\log_2 4-\log_4 8=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

(5) $\begin{vmatrix}53\sqrt{7} & 106\sqrt{7}\\ 78\sqrt{2} & 156\sqrt{2}\end{vmatrix}=53\sqrt{7}\cdot 78\sqrt{2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$

其中以 **(3)** $\sqrt{2}\sin 76^\circ>\sqrt{2}\sin 45^\circ=1$，此數為各選項中最大者。

二、多選題（占 40 分）

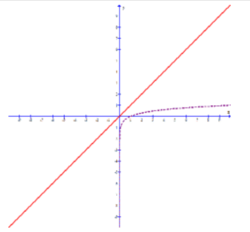
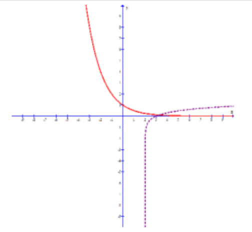
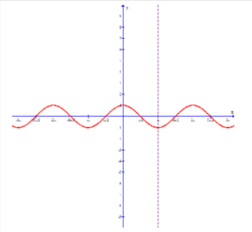
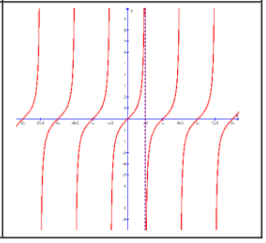
6	7	8	9
25	1345	245	1345

6. (1) 利用三角函數疊合，$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\le\sqrt{2}<\sqrt{3}$

(2) 正切函數 $y=\tan x$ 的值域 $(-\infty,\infty)$，故存在實數 x 使得 $\tan x=-10000000$

(3), **(5)** 可透過畫圖找出實數解，如下所示

(4) $\sin x\le 1<e^x+1$，因此 $\sin x=e^x+1$ 無解。

6-(3)	6-(5)	7-(3)	7-(4)
$y=x$	$y=2^{-x}$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
$y=\log x$	$y=\log(x-2)$	$x=\pi$	$x=\dfrac{\pi}{2}$
			

7. (1) 因為底數 $a=3>1$，所以 $y=3^x$ 是嚴格遞增函數

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的函數圖形應為凹口向上

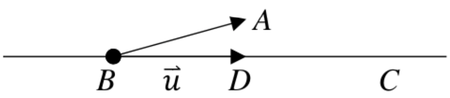
(3), (4) 可透過畫圖找出對稱軸、漸近線，如上所示。

(5) 將 $y=\sin x$ 的圖形以 y 軸為中心壓縮 $\dfrac{1}{2}$ 倍可得 $y=\sin(2x)$的圖形，故週期為 π。

8. (1) 兩向量 $\overrightarrow{BA}=(4,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(2,-4)$ 不平行，故 A, B, C 三點不共線

(2) 重心 $G\left(\dfrac{2+(-2)+0}{3},\dfrac{1+3+(-1)}{3}\right)$ 即 $G(0,1)$　(3) 應為 $\cos\angle ABC=\dfrac{4}{5}$

(4) $d(A,\overleftrightarrow{BC})=|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BA}-\vec{u}|$　**(5)** 點 A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 投影點 D 滿足 $\overrightarrow{BD}=\vec{u}$。



9. (1) 利用克拉瑪公式，可解得 $(x,y)=(\dfrac{4}{k+2},\dfrac{1}{k+2})$

(2) 此時 $\Delta\ne 0$，故應為兩向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不平行

(3) 方程式 $x+y=1$ 的一個參數式 $(x,y)=(t,1-t)$，t 是實數

(4) 所求 $|\,|\vec{a}\ \ \vec{c}|\,|=\left|\begin{vmatrix}k+1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|=|(k+1)-4|=|k-3|$

(5) 當 $k>3$ 時，由 (1) 可知 $x>0$，此時 Δ 和 Δ_x 同正負號，於是

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}4 & 4\\ 1 & k-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}k+1 & 4\\ 1 & k-2\end{vmatrix}}=\frac{\left|\begin{vmatrix}4 & 4\\ 1 & k-2\end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix}k+1 & 4\\ 1 & k-2\end{vmatrix}\right|}=\frac{\vec{b},\vec{c}\text{ 所張的平行四邊形面積}}{\vec{a},\vec{b}\text{ 所張的平行四邊形面積}}\text{。}$$

三、填充題（占 30 分）

10	11	12	13	14
2	1	3	7	1

10. $\cos\frac{5\pi}{6}\tan\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\mathbf{2}$。

11. 依圖 $\tan\alpha=\frac{1}{3},\tan\beta=\frac{1}{2}$，和角公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\mathbf{1}$。

12. 因為「真數」為正，所以 $x^2+2x>0$ 且 $2+x>0$ 先知道 $x>0$；

利用對數定義及對數律得 $x^2+2x=3(2+x)$，易解得 $x=\mathbf{3}$ 或 -2(不合)。

13. 因為 $\vec{u}\ //\ (2\vec{a}-3\vec{b})$，可設 $\vec{u}=k(2\vec{a}-3\vec{b})=k\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ 其中 $k\neq0$；

又因為 $\vec{u}\perp(t\vec{a}-8\vec{b})=\begin{bmatrix}2t-16\\-4t+24\end{bmatrix}$，故有

$k\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2t-16\\-4t+24\end{bmatrix}=k[(-4t+32)+(-4t+24)]=0$ 整理得 $8t=56$ 解得 $t=\mathbf{7}$。

14. <方法一> 利用直線參數式，設 $P(3-4t,-1+3t)$ 代入 x^2+y^2 得

$x^2+y^2=(3-4t)^2+(-1+3t)^2=25t^2-30t+10=25(t-\frac{3}{5})^2+1\geq\mathbf{1}$。

<方法二> 利用點到直線的距離，原點 $O(0,0)$ 到 L: $3x+4y=5$ 的距離為

$d=d(O,L)=\frac{|3\cdot0+4\cdot0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$，可得 $x^2+y^2\geq d^2=1^2=\mathbf{1}$。

<方法三> 利用柯西不等式，有 $(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq(3x+4y)^2$

將 $3x+4y=5$ 代入上式，得 $25(x^2+y^2)\geq5^2$ 整理得 $x^2+y^2\geq1$；

等號成立於 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$，令 $\begin{cases}x=3t\\y=4t\end{cases}$, t 是實數 代入 $3x+4y=5$ 得 $3\cdot3t+4\cdot4t=5$

解得 $t=\frac{1}{5}$。於是，當 $(x,y)=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ 時，x^2+y^2 有最小值 $(\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2=\mathbf{1}$。