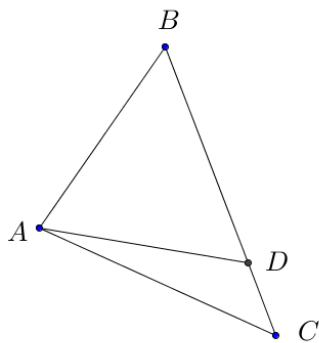


臺北市立松山高中 111 學年度第一學期高二數學 A 期末考試題卷

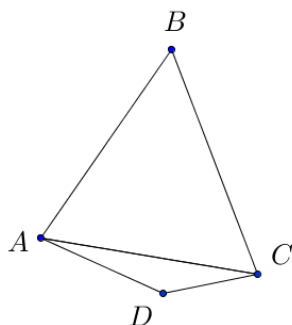
一、單選題(每題 5 分，共 15 分)

1. A, B, C, D 為平面上相異四點(A 不在直線 BC 上)，若 $2\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ，則下列何者可能為 A, B, C, D 所形成的圖形？

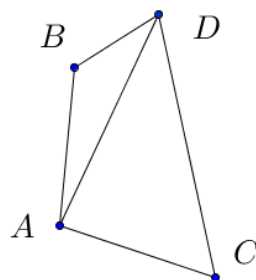
(1)



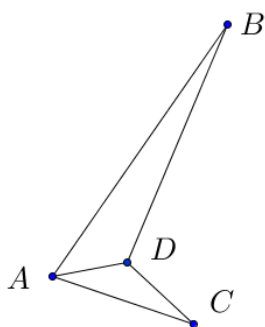
(2)



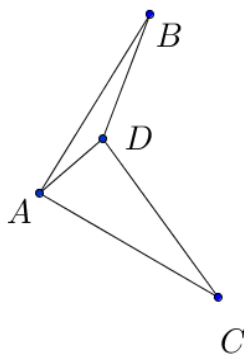
(3)



(4)



(5)



2. 若 $\triangle ABC$ 內接於一個以 O 為圓心的單位圓(半徑為 1)，若滿足

$$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

則下列哪一個 k 值，會使 $\angle AOB$ 最大？

- (1) $\sqrt{2}$ (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\sqrt{7}$ (5) $\sqrt{8}$

3. 設 \vec{a} 與 \vec{b} 為平面上兩非零向量，若 \vec{a} 與 \vec{b} 所張成的平行四邊形面積為 5，則

$3\vec{a} + 4\vec{b}$ 、 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為下列哪一個選項？

- (1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 25 (5) 50

二、多選題(每題7分，錯1個選項該題得5分，錯2個選項該題得3分，錯3個選項該題得1分，答錯多餘3個選項或未作答該題得0分，共35分)

1. 平面上有三個非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，下列敘述何者正確？

- (1) 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，則 $\vec{a} = \vec{b}$ 。
- (2) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$ ，則 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ 。
- (3) 若 \vec{a} 在 \vec{b} 上的正射影為 \vec{c} ，則 \vec{a} 在 $-\vec{b}$ 上的正射影為 $-\vec{c}$ 。
- (4) 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，則 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 。
- (5) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，則 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 。

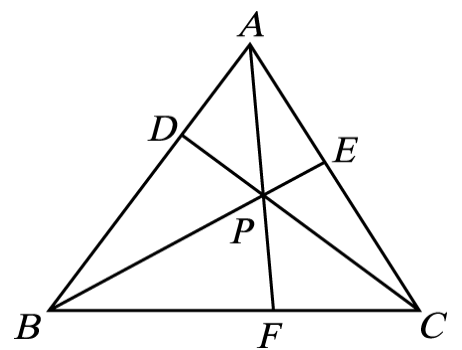
2. 已知直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \end{cases}$ ，(t 為實數)，下列敘述何者正確？

- (1) 向量 $(2,1)$ 為直線 L 的一個法向量。
- (2) 點 $(2,1)$ 與直線 L 之距離為 1。
- (3) 在直線 L 中，若 $0 \leq t \leq 1$ ，則其所表示的圖形為一長度為 $\sqrt{5}$ 的線段。
- (4) 直線 M ： $\begin{cases} x=2-3s \\ y=-1+6s \end{cases}$ ，(s 為實數) 與直線 L 平行。
- (5) 若直線 L' ： $4x+ay-6=0$ 與直線 L 的夾角為 45° ，則 $a=12$ 。

3. 在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分別在 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 上，且 \overline{CD} 與 \overline{BE} 交於 P ，已知

$\vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$ ，且直線 AP 交 \overline{BC} 於 F 點，下列選項何者正確？

- (1) $\vec{AC} = 2\vec{AE}$
- (2) $\overline{BF} : \overline{FC} = 2 : 1$
- (3) $\overline{AP} : \overline{PF} = 3 : 5$
- (4) 若 $\triangle ABP$ 的面積為 5，則 $\triangle ACP$ 的面積為 10
- (5) 若 $\triangle ABP$ 的面積為 10，則 $\triangle ABC$ 的面積為 25



4. 設 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 皆為實數，若 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ 均不為 $\vec{0}$ ，且

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ 則下列敘述何者正確?}$$

(1) 若 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ ， x, y 為實數，則 $(x, y) = (0, 0)$ 。

(2) 若 $\Delta = 0$ ，則 \vec{c} 無法表示成 \vec{a} 與 \vec{b} 的線性組合。

(3) 若方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 恰有一解，則方程組 $\begin{cases} a_1x + 2b_1y = c_1y + c_1 \\ a_2x + 2b_2y = c_2y + c_2 \end{cases}$ 亦恰有一解。

(4) 若 $\vec{a} = (2, -1), \vec{b} = (-1, 3)$ ，則 \vec{a}, \vec{b} 所張成之平行四邊形的面積為 5。

(5) 若 $\Delta \neq 0$ 且 $5\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}$ ，則 \vec{c}, \vec{b} 所張成的平行四邊形面積

為 \vec{a}, \vec{b} 所張成的平行四邊形面積之 5 倍。

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6, \overline{BC} = 2\sqrt{7}, \overline{AC} = 4$ ，且 G 為其重心， O 為其外心， H 為其垂

心， I 為其內心，下列何者正確？

(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12$ 。

(2) $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 。

(3) $\vec{AO} = \frac{1}{9}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ 。

(4) $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ 。

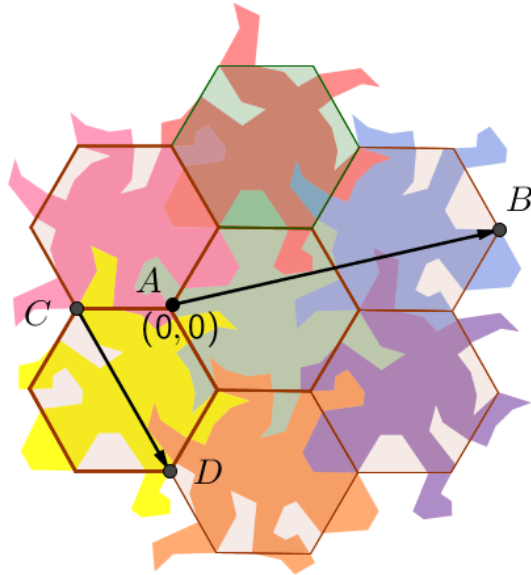
(5) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$ 。

三、填充題(共 40 分，每格全對才給分)

答對 格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	7	14	21	28	31	34	37	40

1. 下圖為艾薛爾平面鑲嵌作品《蜥蜴》(reptiles)，

是艾薛爾在 1939 年 1 月所創作的一幅版畫，其利用許多正六邊形所拼接而成，若每個正六邊形邊長為 2，試回答下列各問題。



(1) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} =$ _____。

(2) 若 \vec{AB} 在 \vec{CD} 上的正射影為 $r\vec{CD}$ ，則實數 r 之值為_____。

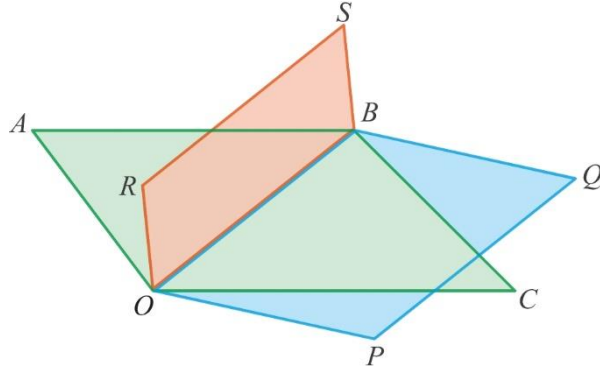
(3) $|\vec{AB} + t\vec{CD}|$ 有最小值為_____。

(4) 點 P 滿足 $\vec{AP} = r\vec{AB} + s\vec{AC}$ ，其中 $-1 \leq r \leq 3$ ， $-2 \leq s \leq 0$ ，則 P 點所成的區域面積為_____。

2. 已知 \vec{a} ， \vec{b} 夾角為 60° 且 $|\vec{a}|=2$ ， $|\vec{b}|=1$ ，若 $\vec{a} + \vec{b}$ 垂直 $2\vec{a} + t\vec{b}$ ，試求實數 t 值為_____。

3. 若平面兩向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，且 $\vec{a} - \vec{b} = (4,3)$ ，若 $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ ，則 $|\vec{b}| =$ _____。

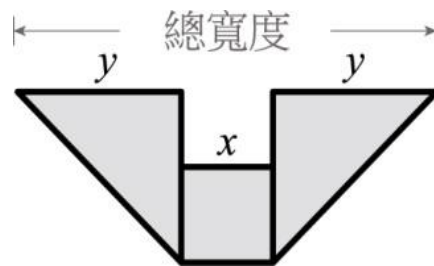
4. 如下圖， \overline{RS} ， \overline{PQ} 平行 \overline{OB} ，且平行四邊形 $OPQB$ 面積為 24，平行四邊形 $ORSB$ 面積為 12，三角形 OPR 面積為 6，若 $\overrightarrow{OB} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OR}$ (x, y 實數)，則 $x + y =$ _____。



5. 坐標平面上三點 $O(0, 0)$, $A(1, 3)$, $B(-5, 0)$ ，且直線 $L: y = mx$ ，若 \overrightarrow{OA} 與 \overrightarrow{OB} 在 L 上的正射影相同，則 $m =$ _____。

四、混合題(共 10 分)

1. 下圖是某溝渠的縱截面，其中中央是一個邊長為 x (公尺) 的正方形，左右兩側是兩個腰長為 y (公尺) 的等腰直角三角形，其中 $x > 0, y > 0$ 。考量堅固性及用料等因素，縱截面的面積須為 80 (平方公尺)。試求下列問題：



- (1) 試求 $x^2 + y^2$ 的值為 _____。(填充題，2 分)
- (2) 試求總寬度 $x + 2y$ 的最大值，及此時 x, y 的值。
(計算題，8 分，作答須寫出詳細計算過程。)

臺北市立松山高中 111 學年度第一學期高二數學 A 期末考答案卷

班級_____座號_____姓名_____

一、單選題(每題 5 分，共 15 分)

1.	2.	3.

二、多選題(每題 7 分，錯 1 個選項該題得 5 分，錯 2 個選項該題得 3 分，錯 3 個選項該題得 1 分，答錯多餘 3 個選項或未作答該題得 0 分，共 35 分)

1.	2.	3.
4.	5.	

答對 格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	7	14	21	28	31	34	37	40

三、填充題(共 40 分，每格全對才給分)

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)
2.	3.	4.	5.

四、混合題(共 10 分)

1. (1) (填充題) 答：_____ (2 分)
(2) (計算題，8 分，作答須寫出詳細計算過程。)

臺北市立松山高中 111 學年度第一學期高二數學 A 期末考答案卷

一、單選題(每題 5 分，共 15 分)

班級_____座號_____姓名_____

1.	2.	3.
(5)	(1)	(4)

二、多選題(每題 7 分，錯 1 個選項該題得 5 分，錯 2 個選項該題得 3 分，錯 3 個選項該題得 1 分，答錯多餘 3 個選項或未作答該題得 0 分，共 35 分)

1.	2.	3.
(2)(4)	(1)(3)	(1)(2)(5)
4.	5.	
(4)(5)	(1)(2)(4)	

三、填充題(共 40 分，每格全對才給分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	7	14	21	28	31	34	37	40

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)
8	$\frac{1}{2}$	$4\sqrt{3}$	$16\sqrt{3}$
2.	3.	4.	5.
-5	$2\sqrt{5}$	3	-2

四、混合題(共 10 分)

<p>1. (1)(填充題) 答：80 (2 分)</p> <p>(2) (計算題，8 分，作答須寫出詳細計算過程。) 答：(2) 最大值 20 (4 分)，此時 $x=4$，$y=8$ (各 2 分)</p> <p>(2) 因為 $x^2 + y^2 = 80$ 且總寬度為 $x+2y$，所以由柯西不等式，得 $(x^2 + y^2)(1^2 + 2^2) \geq (x+2y)^2$，將(1)的結果 $x^2 + y^2 = 80$ 代入，得 $80 \times 5 \geq (x+2y)^2$，即 $-20 \leq x+2y \leq 20$。</p> <p>而且當 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2}$，即 $2x = y$ 時，等號成立。解聯立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 80 \\ 2x = y \end{cases}$ 且 $x > 0, y > 0$，得 $x=4$，$y=8$。</p> <p>故當 $x=4$，$y=8$ 時，總寬度 $x+2y$ 有最大值 20 (公尺)。</p>
