台北市立松山高中 111 學年度第一學期　第一次期中考　高三數甲試題卷

一、單選題：(每題 4 分，占 12 分)

1. 下列有關循環小數的敘述中，請選出「錯誤」的選項。

(1) $0.\overline{2}+0.\overline{8}=0.\overline{3}+0.\overline{7}$

(2) $0.\overline{5}+0.\overline{5}=1.\overline{1}$

(3) $0.\overline{7}+0.\overline{2}=1$

(4) $0.\overline{25}+0.\overline{75}=1.\overline{1}$

(5) $0.4\overline{9}=0.5$

2. 對於任意實數 x，以 $[x]$ 表示「不大於 x 的最大整數」，我們稱 $[\quad]$ 為<u>高斯</u>符號，稱函數 $y=[x]$ 為<u>高斯</u>函數，求 $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{[2x]}{x}$ 的極限值為下列何者？

(1) -1　(2) 0　(3) 1　(4) 2　(5) 不存在

3. 已知函數 $f(x)=x\cdot\pi^{x}$ 為連續函數。若在正整數 k 與 $k+1$ 間有一實數 c 滿足 $f(c)=\pi^{10}$，則 k 的值為下列何者？

(1) 7　(2) 8　(3) 9　(4) 10　(5) 11

二、多重選擇題：

(每題 8 分，占 48 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1. 判斷下列各無窮數列，何者收斂到 0？

(1) $\left\langle \dfrac{n^2+n+1}{1000n^2} \right\rangle$　(2) $\left\langle \dfrac{(-1)^n}{n^2} \right\rangle$　(3) $\left\langle \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \right\rangle$　(4) $\left\langle \left(-\dfrac{1}{\pi}\right)^n \right\rangle$　(5) $\left\langle \dfrac{10^n+11^n}{9^n+10^{n+1000}} \right\rangle$

2. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為「格子點」。設 k、n 均為正整數，已知當 $x\ge 0, y\ge 0$ 時，滿足 $x+2y=4k$ 的格子點 (x,y) 的數目為 a_k，令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，下列敘述何者正確？

(1) $a_1=3$　(2) $a_k=2k+1$　(3) $S_n=n^2+n$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^3}=0$

3. 假設兩數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，對所有正整數 n 都滿足$b_n+\dfrac{2n}{n+1}<a_n<3b_n$。已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$，下列敘述何者正確？

(1) $b_n>\dfrac{n}{n+1}$　(2) $b_n<3-\dfrac{2n}{n+1}$　(3) 數列$\langle b_n\rangle$有可能發散

(4) $a_{100000}<3.1$　(5) $a_{100000}>2.9$

4. 設三函數 $f(x)=\dfrac{1-x}{|x-1|}$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}&,當x\neq1\\0&,當x=1\end{cases}$，$h(x)=(x-1)\cos\dfrac{1}{x-1}$，下列敘述何者正確？

(1) 右極限$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$　(2) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在　(3) $\lim\limits_{x\to1}g(x)=1$

(4) $g(x)$在$x=1$處不連續　(5) $\lim\limits_{x\to1}h(x)=1$

5. 已知$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\approx2.71828$，以 e 為底數的對數函數可記作$\ln x$，即$\log_e x=\ln x$。

設 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x$，$h(x)=x-1$，$k(x)=ex$，下列敘述何者正確？

(1) $f(x)$定義域為所有實數$\mathbb{R}$　(2) $g(x)$的值域為$\{y\in\mathbb{R}|y\geq0\}$　(3) $(f\circ g)(x)=x$

(4) $(g\circ h)(x)$的圖形是$g(x)$的圖形向左平移 1 單位　(5) $(f\circ h)(x)$與$(g\circ k)(x)$互為反函數

6. 當函數$f(x)$對所有 x 均滿足$f(-x)=-f(x)$，稱$f(x)$為奇函數；當函數$f(x)$對所有 x 均滿足$f(-x)=f(x)$時，稱$f(x)$為偶函數。已知$f_1(x)=5x^3+7$、$f_2(x)=|\sin x|$、$f_3(x)=x+|x|$、$f_4(x)=2^x+2^{-x}$、$f_5(x)=2^x-2^{-x}$，下列敘述何者正確？

(1) $f_1(x)$為奇函數　(2) $f_2(x)$為偶函數　(3) $f_3(x)$不是奇函數，也不是偶函數

(4) $f_4(x)$的函數圖形對稱於 y 軸　(5) $f_5(x)$為偶函數

三、填充題：(每格 6 分，占 24 分)

1. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$，$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}=6$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 為_____(A)_____。

2. 求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right)=$_____(B)_____。

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{|x^2-5x-1|}{|x|-1}-\dfrac{5}{x-1}\right)=$_____(C)_____。

3. Cantor Set 康托爾集在拓樸學中是一個非常有名的例子，其製作的步驟如下圖所示：

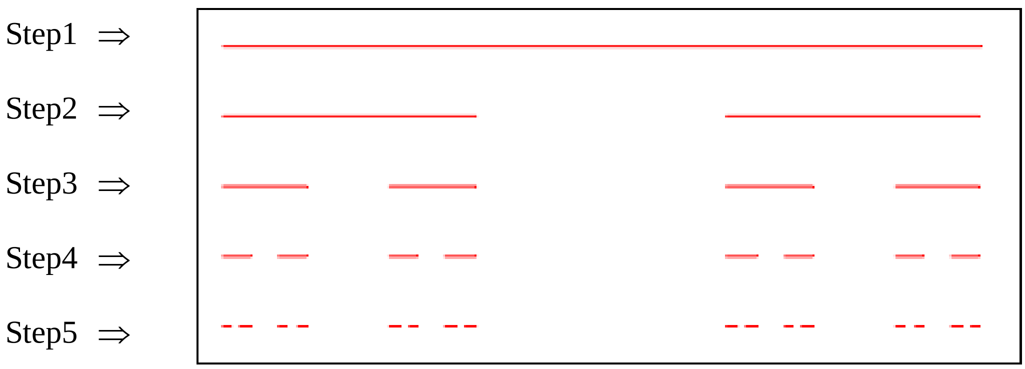
Step1：給定 $[0,1]$ 閉區間

Step2：挖掉中間的三分之一開區間 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，留下兩條線段：$\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$

Step3：再將現有的兩個閉區間 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$、$\left[\frac{2}{3},1\right]$，各挖掉中間的三分之一開區間 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$、$(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$，

留下四條線段：$\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$。

依此步驟一直進行下去，最後所成的集合即為「Cantor Set」，其圖形稱為「碎形」。

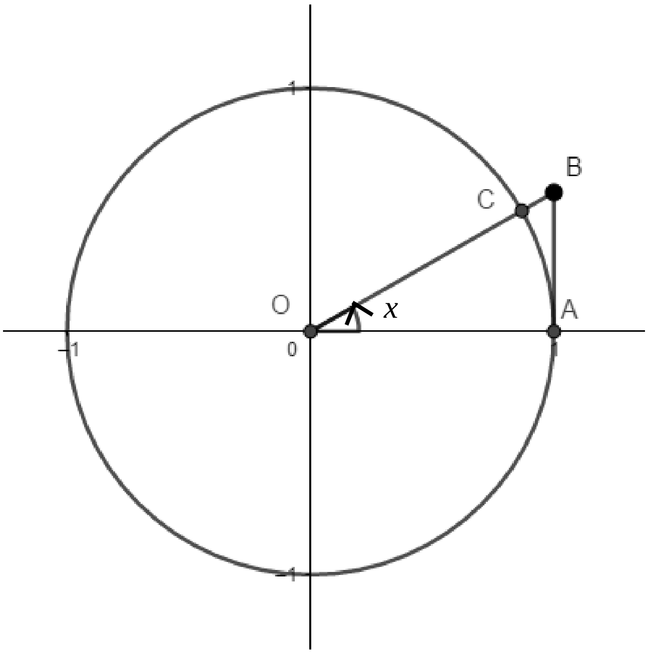


⋮

求 Cantor Set「挖掉的總長度」為_____(D)_____。

四、混合題：(占 16 分，單選題直接寫答案；非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。)

如圖所示，在單位圓中，$\overline{OA}=\overline{OC}=1$，設廣義角 $\angle AOC = x$（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$），且 $\overline{AB}\perp\overline{OA}$，已知 ΔOAC 的面積為 a，扇形 OAC 的面積為 b，ΔOAB 的面積為 c。已知當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 時，可利用 a、b、c 的大小關係，得 $\sin x \le x \le \tan x$，再利用夾擠定理，可得右極限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，試回答下列問題：



1. 當廣義角 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 時，$\sin x$、x、$\tan x$ 的大小關係為下列何者？(單選題，4 分)

   (1) $\sin x \le x \le \tan x$　(2) $\sin x \le \tan x \le x$　(3) $x \le \tan x \le \sin x$

   (4) $\tan x \le \sin x \le x$　(5) $\tan x \le x \le \sin x$

2. 利用夾擠定理，求左極限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}$。(非選擇題，8 分)

3. 綜合題目已知與 2.的結論，求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$。(非選擇題，4 分)

台北市立松山高中 111 學年度第一學期　第一次期中考　高三數甲答案卷

班級：＿＿＿＿　座號：＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿

一、單選題：(每題 4 分，占 12 分)

1.		2.		3.	

二、多重選擇題：

（每題 8 分，占 48 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分）

1.		2.		3.	
4.		5.		6.	

三、填充題：(每格 6 分，占 24 分)

(A)		(B)	
(C)		(D)	

四、混合題：(占 16 分，單選題直接寫答案；非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。)

1.		(單選題，4 分)

2.(非選擇題，8 分)	3.(非選擇題，4 分)

台北市立松山高中 111 學年度第一學期　第一次期中考　高三數甲答案卷

班級：________　座號：________　姓名：______________

一、單選題：(每題 4 分，占 12 分)

1.	4	2.	5	3.	2

二、多重選擇題：

(每題 8 分，占 48 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1.	234	2.	125	3.	15
4.	24	5.	135	6.	234

三、填充題：(每格 6 分，占 24 分)

(A)	$\frac{1}{2}$	(B)	$\frac{5}{4}$
(C)	3	(D)	1

四、混合題：(占 16 分，單選題直接寫答案；非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。)

1.	5	(單選題，4 分)

2.(非選擇題，8 分)

由 1.知 $\tan x \le x \le \sin x$

同除以 $\sin x$

$\because \sin x < 0$

$\therefore 1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$ (3 分)

$\Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$(2 分)

又 $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1$，由夾擠定理(2 分)

可得 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$(1 分)

3.(非選擇題，4 分)

由題目已知 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

由 2.得 $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

因為 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$(2 分)

故 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$(2 分)