臺北市立松山高級中學 110 學年度第二學期高三數學甲期末考試卷

＊本試題中 $i=\sqrt{-1}$　　　　班級：_____座號：_____姓名：_________

一、單一選擇題(每題 4 分，共 12 分)

(　　)1.一個公正的骰子連擲 50 次，試問 1 點出現幾次的機率最大？

(1) 8 次　(2) 9 次　(3) 25 次　(4) 42 次　(5) 50 次

(　　)2.試判斷下列選項中，隨機變數 A~E 何者非二項分布？

(1)阿松「丟一個 5 元硬幣」20 次，A 是其中人頭朝上的次數

(2)阿山「同時擲兩粒公正骰子」30 次，觀察所出現的點數，B 是兩粒骰子點數和為 7 的次數

(3)小高「抽取一副 52 張的撲克牌」10 次，每次抽一張，觀察顏色後放回，C 是其中黑色牌出現的次數

(4)「國際學生能力評量計畫 PISA」調查了各國 15 歲青少年是否認為學習數學有價值，一位記者在臺灣街頭訪談 15 歲青少年，D 是出現第一位認為學習數學有價值所需訪談的人數

(5)小中觀察班上 30 位同學某堂數學課情形(上課或滑手機),E 是其中滑手機的人數

(　　)3.設隨機變數 X 表示投擲一不公正骰子出現的點數，$P(X=k)$ 表示隨機變數 X 取值 k 的機率。已知 X 的機率分布如下表（x、y 為未知常數），又 X 的期望值 $E(X)=\mu=3$，試問下列選項何者正確？

$X=k$	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	x	y	y	x	y	y

(1) $x+2y=1$　(2) $x<y$　(3) $E(X^2)=[E(X)]^2$

(4) X 的變異數 $Var(X)=E(X-\mu)$　(5)投擲此骰子兩次，點數和為 3 的機率為 $\frac{1}{18}$

二、多重選擇題(每題 6 分，共 18 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個(含)以上得 0 分)

(　　)1.在複數平面上有兩點 A 與 B，其所代表的複數分別為 z_1 與 z_2，O 表原點，

若 $|z_1|=\sqrt{3}$，$Arg(z_1)=70^\circ$，$\frac{z_2}{z_1}=1+\sqrt{3}i$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $|z_2|=2\sqrt{3}$　(2) $Arg(-z_1)=Arg(\frac{1}{z_1})$　(3) ΔAOB 的面積為 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4) $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$　(5) $|z_1+z_2|=\sqrt{21}$

(　　　)2.設隨機變數 X 表示小松射擊命中靶面所需發數，已知小松打靶命中率為 p，且每發射擊命中靶面與否的情況皆獨立。已知 X 的變異數 $Var(X)=12$。試問下列哪些選項是正確的？

(1) X 的期望值 $E(X)=4$（發）　　(2) X 的標準差 $\sigma(X)=2\sqrt{3}$（發）

(3)小松打靶命中率 $p=\frac{1}{12}$　　(4) $P(X=3)=(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$　　(5) $P(X\geq 3)=\frac{9}{16}$

(　　　)3.設 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $\omega^3=1$　　(2) $1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}=0$

(3) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=9$　　(4) $\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1+\omega^2}=1$

(5)令 $\omega\times[2(\sin 10^\circ+i\cos 10^\circ)]^2=a+bi$，其中 a、b 為實數。在複數平面上，

$a+bi$ 對應的點（a，b）在第二象限

三、填充題(每格 6 分，共 60 分)

1.重複丟兩枚均勻的硬幣 400 次，令隨機變數 X 表示兩枚硬幣都出現反面的次數，
求 X 的期望值 $E(X)=$________（次）。

2.小松每場比賽得勝的機率為 $\frac{2}{3}$，失敗的機率為 $\frac{1}{3}$。設每場比賽皆有分出勝負且互相獨立，
本週小松參加四場比賽，若每勝一場，可得獎金 1000 元，敗一場則罰款 500 元，
這四場比賽下來，小松至少贏得 2000 元的機率為________。

3.已知小傑參加一場「全同學運動會」獲勝的機率是$\frac{1}{10}$，設每場比賽皆有分出勝負且互相獨立，隨機變數 X 的取值表示小傑獲勝所需的場數，試求小傑至少 3 場（含）失敗的機率為 ________。

4.滿足方程式 $z^4+z^2+1=0$ 的根，在複數平面上對應的點，所決定的多邊形面積為________。

5. $\dfrac{(\sin 10^\circ + i\cos 10^\circ)^3(\cos 9^\circ + i\sin 9^\circ)^{10}}{(\cos 15^\circ - i\sin 15^\circ)^2}=$______。

6.保險公司推出一年期的住宅防火險：「在一年內房屋發生火災可獲理賠 100 萬元，保費為 2500 元」。根據資料顯示，住宅房屋發生火災的機率為 0.0015，試問每張保單中，保險公司獲利的期望值為_________元。

7.小松手持一枚硬幣，宣稱其正面出現的機率為 0.6。為了驗証小松說的是否真實，小高設定檢定標準 $\alpha=0.05$，並連續投擲此枚硬幣 15 次，設隨機變數 X 表示正面出現的次數，且令拒絕域為 $X \le n_1$ 或 $X \ge n_2$，試利用下表求出數對 $(n_1,n_2)=$________。

$X=k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X\le k)$	0.0000	0.0000	0.0003	0.0019	0.0093	0.0338	0.0950	0.2131
$p(X\ge k)$	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9981	0.9907	0.9662	0.9050

$X=k$	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(X\le k)$	0.3902	0.5968	0.7827	0.9095	0.9729	0.9948	0.9995	1.0000
$p(X\ge k)$	0.7869	0.6098	0.4032	0.2173	0.0905	0.0271	0.0052	0.0005

8.試求 $-4+4\sqrt{3}i$ 的 3 個三次方根為______________________________。【以極式(取主輻角)作答】

9.設隨機變數 X 的取值表示投擲一顆骰子 2 次後,「點數 1」出現的總次數;

而隨機變數 Y 代表 2 次投擲中出現「點數 1」的頻率,即 $Y=\dfrac{X}{2}$。

若此顆骰子為「非公正」的骰子,出現「點數 1」的機率為 $\dfrac{1}{4}$。

試求隨機變數 Y 的變異數 $Var(Y)=$____________。

10.設有n把樣子相似的鑰匙,其中只有一把鑰匙能將寶箱打開,今一次抽取一把鑰匙去試開寶箱上的鎖,直到成功打開寶箱為止。設每次抽取鑰匙是互相獨立的,且每把鑰匙被抽取到的機率相等,每把鑰匙試開後「不放回」。設隨機變數X的取值表示打開寶箱所需次數,若X的變異數 $Var(X)=V_n$,試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{V_n}{n^2}=$_________。

四、混合題(共 10 分)

松山高中舉辦園遊會,某攤位舉辦促銷活動,凡消費 88 元即可抽獎一次,獎品為限量發行的「燃燒你的松山魂」飲料提袋,該攤位宣稱「平均 10 次即可抽中一次」,試回答下列問題:

(　　)1.(單選題)(2 分)

假設中獎機率為 0.1,隨機變數 X 的取值表示抽獎直到中獎所需的次數,試求恰好在第 3 次中獎的機率為何?

(1)0.1　(2)$(0.1)^3$　(3)$(0.9)(0.1)$　(4)$(0.9)^2(0.1)$　(5)$(0.9)(0.1)^2$

2.若 k 為一正整數,試求 $P(X>k)$ 為何?(3 分)

3.

(1)設顯著水準 $\alpha=0.1$,且令拒絕域為 $X>n$,試求拒絕域為何?($\log 3\approx 0.4771$) (4 分)

(2)試利用(1)說明,若小松連續抽了 15 次才中獎,

則此攤位所宣稱「平均 10 次即可抽中一次」的說法是否合理?(1 分)

臺北市立松山高級中學 110 學年度第二學期高三數學甲期末考答案卷

使用班級	高三數甲	班級		座號		姓名		得分	

一、單一選擇題(每題 4 分，共 12 分)

1	2	3
1	4	5

二、多重選擇題(每題 6 分，共 18 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個(含)以上得 0 分)

1	2	3
135	125	124

三、填充題(每格 6 分，共 60 分)

1	2	3
100	$\frac{16}{27}$	0.729
4	5	6
$\sqrt{3}$	1	1000
7	8	9
（4,14）	$2(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9})$ 、 $2(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9})$ $2(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9})$	$\frac{3}{32}$
10		
$\frac{1}{12}$		

四.混合題(共 10 分)

1.(單選題)(2 分)	2.(3 分)	3. (5 分)
4	$P(X>k)$ $=P(X=k+1)+P(X=k+2)+\ldots$ $=(0.9)^k(0.1)+(0.9)^{k+1}(0.1)+\ldots$ $=\frac{(0.9)^k(0.1)}{1-0.9}=(0.9)^k$	（1） $(0.9)^k<0.1$（1分） $\Rightarrow \log(0.9)^k=k\log\frac{9}{10}<\log\frac{1}{10}$ $\Rightarrow k>\frac{-1}{2\log 3-1}=\frac{-1}{-0.0458}=21.\sim$（2分） 故拒絕域為 $X>22$ （1 分） （2）合理（不拒絕假設）（1 分） (未用（1）說明不給分)