

臺北市立松山高中 110 學年度第二學期 期末考 高二社數 B 試題

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多重選擇題：每題 6 分，共 30 分。

1. 設 A 、 B 、 C 都是二階方陣， O 是二階零方陣，則下列哪些敘述恆正確？

- (1) $AB = BA$ (2) $(A+I)^2 = A^2 + 2A+I$ (3) 若 $AB = O$ ，則 $A = O$ 或 $B = O$
(4) 若 $A+B = A+C$ ，則 $B=C$ (5) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ 。

2. 一種密碼編寫技術是使用二階方陣作為密碼傳遞的加密矩陣，將原始訊息的數字明文經過加密矩陣的乘法偽裝成數字亂碼後傳遞，收到數字亂碼的人再利用解密矩陣的乘法轉譯為數字明文。若以下列 5 個二階方陣作為加密矩陣，哪幾個將導致數字亂碼無法轉譯為數字明文？

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 96 & 97 \\ 98 & 99 \end{bmatrix}$ 。

3. 坐標平面上，關於二階方陣 A 所造成的變換，下列哪些敘述正確？

- (1) 原點經過 A 變換後還是原點 (2) 一直線經過 A 變換後可能是一直線
(3) 一直線經過 A 變換後可能是一點 (4) 一點經過 A 變換後必會換位置
(5) 一非零向量經過 A 變換後必是一非零向量。

4. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項：

- (1) A 的行列式 (值) 為 6 (2) $A^2 = 5A - 6I_2$
(3) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$ (4) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
(5) $[1 \ 1]A = [5 \ 7]$ 。

5. 空間中，已知直圓錐面 Γ 與平面 E 的截痕為圓，且以下所有平面皆不通過直圓錐面的頂點，則下列哪些敘述正確？

- (1) 若平面 $E_1 \parallel E$ ，則 Γ 與平面 E_1 的截痕也是圓
(2) 若 Γ 與平面 E_2 的截痕是圓，則 E_2 與 Γ 的每條母線都有交點
(3) 若平面 $E_3 \perp E$ ，則 Γ 與平面 E_3 的截痕是雙曲線
(4) 若平面 E_4 與平面 E 所夾銳角為 15° ，則 Γ 與平面 E_4 的截痕是橢圓
(5) 若平面 E_5 與平面 E 所夾銳角為 75° ，則 Γ 與平面 E_5 的截痕是雙曲線。

二、填充題：每格 5 分，共 60 分。

1. 令 $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 2 & k-1 \end{bmatrix}$ ，若乘法反方陣 A^{-1} 不存在，則實數 $k =$ _____。

2. 已知二元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=-2 \end{cases}$ 。若 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $(x, y) =$ _____。

3. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 。(1) 已知 A 將 Q 對應到 $Q'(2, 1)$ ，則 Q 的坐標為 _____。

(2) 已知 A 將直線 $L: y = 2x$ 對應到直線 M ，則直線 M 的方程式為 _____。

4. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。利用 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = I + A$ ，試將 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{10}$ 表示成 $aI + bA$ (a, b 為實數) 的形式，則序對 (a, b) 為 _____。

5. 已知二階方陣 A 滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ，且 $A^5 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ，求二階方陣 A 為 _____。

6. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，二階方陣 B 滿足 $PB = AP$ 。求(1) 二階方陣 B 為 _____

(2) 二階方陣 A^5 為 _____。

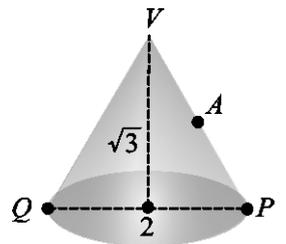
7. 設 P, Q, R 為二階方陣，已知 $PQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ 且 $Q + R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，則

$P =$ _____。

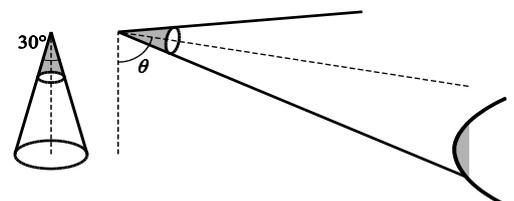
8. 右圖中直圓錐的高為 $\sqrt{3}$ ， V 為頂點，底圓的直徑 $\overline{PQ} = 2$ ， A 為 \overline{VP} 的中點。

(1) 若一平面通過 A, Q 兩點且與此直圓錐面截出的圖形為一個完整的封閉曲線，則此平面與直圓錐底面所夾的銳角為 _____。

(2) 若一平面通過 A 點且與此直圓錐面截出的圖形為拋物線，則此平面與直圓錐底面所夾的銳角為 _____。



9. 一手電筒燈罩的張角為 30° ，使照射的燈光形成直圓錐狀，且照在地面上形成的區域邊緣為一圓，如左下圖所示。若將手電筒旋轉一銳角 θ ，使其在地面上形成之照亮區域邊緣為雙曲線的一部分，如右下圖所示，此時 $k^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $k =$ _____。



三、混合題：10 分(題目詳見答案卷)

臺北市立松山高中 110 學年度第二學期 期末考 高二社數 B 答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多選題：每題 6 分，共 30 分。

(錯一個選項得 4 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上不得分)

1	2	3	4	5

二、填充題：每格 5 分，共 60 分。

1	2	3(1)	3(2)	4	5
6(1)	6(2)	7	8(1)	8(2)	9

三、混合題：10 分

某大學數學系的微積分課程總成績計算方式如下：

(I) 期中考考 2 次，分別占總成績的 25% (II) 期末考占總成績的 30% (III) 平時成績占總成績的 20%

當期末要結算成績時，助教要計算多位學生的總成績，於是他想利用矩陣的乘法來計算，首先他先將學生每個項目的成績列出，列出方式如下：

姓名	期中考(I)	期中考(II)	期末考	平時成績
甲	70	75	75	90
乙	60	70	70	85
丙	100	90	95	95
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

再轉換成矩陣的型式呈現：
$$\begin{bmatrix} 70 & 75 & 75 & 90 \\ 60 & 70 & 70 & 85 \\ 100 & 90 & 95 & 95 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
，試問：

(1) 若要計算總成績，需將上面的矩陣乘上下面哪一個矩陣後，才能呈現每位同學的總成績？

(A) $[25\% \quad 25\% \quad 30\% \quad 20\%]$ (B) $[20\% \quad 25\% \quad 25\% \quad 30\%]$ (C) $\begin{bmatrix} 20\% \\ 25\% \\ 25\% \\ 30\% \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 25\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 20\% \end{bmatrix}$ 。

(2) 若小華前兩次期中考分別考了 30 分及 50 分，利用矩陣乘法計算後，若小華希望總成績能及格（總成績 ≥ 60 分），則期末考至少要考幾分（四捨五入至整數位）。

臺北市立松山高中 110 學年度第二學期 期末考 高二社數 B 答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、多選題：每題 6 分，共 30 分。

(錯一個選項得 4 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上不得分)

1	2	3	4	5
24	24	123	123	123

二、填充題：每格 5 分，共 60 分。

1	2	3(1)	3(2)	4	5
-1,2	(-4,-5)	(3,-7)	$y = \frac{9}{5}x$	(1,1023)	$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
6(1)	6(2)	7	8(1)	8(2)	9
$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$A^5 = \begin{bmatrix} 94 & -93 \\ 62 & -61 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	30°	60°	75

三、混合題：10 分

某大學數學系的微積分課程總成績計算方式如下：

(I) 期中考考 2 次，分別占總成績的 25% (II) 期末考占總成績的 30% (III) 平時成績占總成績的 20%

當期末要結算成績時，助教要計算多位學生的總成績，於是他想利用矩陣的乘法來計算，首先他先將學生每個項目的成績列出，列出方式如下：

姓名	期中考(I)	期中考(II)	期末考	平時成績
甲	70	75	75	90
乙	60	70	70	85
丙	100	90	95	95
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

再轉換成矩陣的型式呈現： $\begin{bmatrix} 70 & 75 & 75 & 90 \\ 60 & 70 & 70 & 85 \\ 100 & 90 & 95 & 95 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ ，試問：

(1) 若要計算總成績，需將上面的矩陣乘上下面哪一個矩陣後，才能呈現每位同學的總成績？

(A) $[25\% \quad 25\% \quad 30\% \quad 20\%]$ (B) $[20\% \quad 25\% \quad 25\% \quad 30\%]$ (C) $\begin{bmatrix} 20\% \\ 25\% \\ 25\% \\ 30\% \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 25\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 20\% \end{bmatrix}$ 。

(2) 若大明前兩次期中考分別考了 10 分與 25 分，小華考了 30 分及 50 分，利用矩陣乘法計算後，若兩人希望總成績能及格（總成績 ≥ 60 分），則期末考至少要考幾分（四捨五入至整數位）。67 分