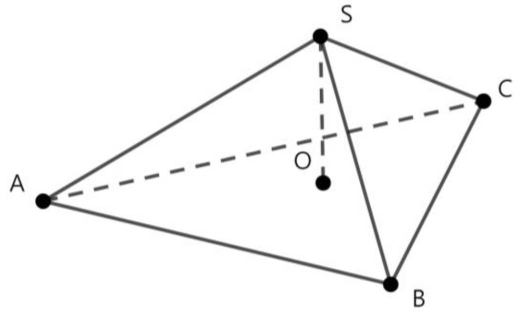
台北市立松山高中 110 學年度第二學期　第一次期中考　高二數 A 試題卷

一、單選題：(每題 4 分，占 8 分)

1. 若四面體 $S-ABC$ 的底面 ABC 為正三角形，已知三個側面 ΔSAB、ΔSBC、ΔSAC 與底面 ABC 所形成的二面角分別為 30°、45°、60°，且頂點 S 在底面的投影點 O 在 ΔABC 內部，如圖所示。試求 O 到 ΔABC 的三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 距離的比為

   (1)$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (2)$1:\sqrt{3}:3$ (3)$1:2:3$ (4)$3:\sqrt{3}:1$ (5)$\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$



2. $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -1 & x-2 & -3 \\ -1 & -2 & x-3 \end{vmatrix}$，下列選項何者$\boxed{\text{錯誤}}$？

   (1) $f(x)$ 為三次多項式

   (2) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 -5

   (3) $f(x)$ 可被 x^2 整除

   (4) $f(6)=0$

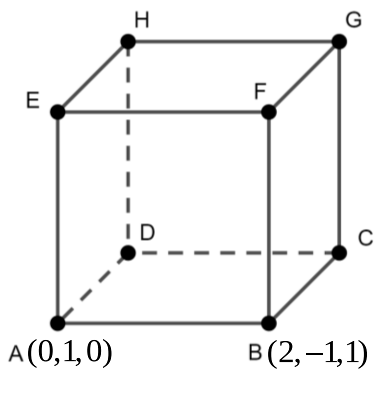
   (5) $f(0)=6$

二、多重選擇題：

(每題 8 分，占 64 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1. 設 $A(0,1,0)$，$B(2,-1,1)$ 是空間中一正立方體的兩個頂點，如圖所示，G 點的坐標可能為

   (1) $(-2,0,2)$　(2) $(-1,-4,1)$　(3) $(-1,2,1)$　(4) $(4,0,-1)$　(5) $(5,2,1)$



2. 設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 是空間中三個不共平面的非零向量，已知 $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)=10$，下列敘述何者正確？

   (1)由 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 所決定的平行六面體體積為 10

   (2)$\left|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|\left|\overrightarrow{c}\right|\sin\theta$，其中 θ 為 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角

(3) $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{b}\right)=10$

(4) $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)=-\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}\right)$

(5)若 $\left|\overrightarrow{a}\right|=2$，則 $\left|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right|$ 的最大值為 5

3. 設空間坐標的原點為 O，P 點坐標為$(1,3,5)$，已知 Q 點在 yz 平面上移動，試問當$\angle POQ$ 最小時，Q 點的坐標可能為

(1) $(0,-3,-5)$　(2) $(0,3,0)$　(3) $(0,3,5)$　(4) $(0,6,8)$　(5) $(0,6,10)$

4. 在空間中給定向量 $\overrightarrow{u}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，下列選項何者正確？

(1)可找到向量 $\overrightarrow{v}=(t,t,t)$，$t\neq 0$，使得 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left|\overrightarrow{v}\right|$

(2)可找到向量 $\overrightarrow{v}$ 使得 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,-1,1)$

(3)若向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}=0$ 且 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

(4)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{v}\right|$，則 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

(5)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{v}\right|$，則 $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}=0$

5. 設 $A(1,0,0)$，$B(4,-4,0)$，$C(-6,1,2)$，下列敘述何者正確？

(1) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為銳角

(2) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $(3,-4,0)$

(3)點 C 在直線 AB 上的投影點坐標為 $(-2,4,0)$

(4)點 C 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{29}$

(5)若 O 為原點，則三向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 所決定的平行六面體體積為 $\left|\begin{vmatrix}1 & 4 & -6\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}\right|$

6. 設空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(0,5,-1)$，$\overrightarrow{b}=(3,-1,0)$，$\overrightarrow{c}=(6,-2,3)$，下列敘述何者正確？

(1) $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{vmatrix}\right)$

(2)由 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所決定的平行四邊形面積為 $3\sqrt{10}$

(3) $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)=\begin{vmatrix}0 & 5 & -1\\ 3 & -1 & 0\\ 6 & -2 & 3\end{vmatrix}$

(4)由 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ 所決定的平行六面體體積為 45

(5) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$ 上的正射影長為 $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

7. 關於$\boxed{\text{空間}}$的概念，下列敘述何者正確？

(1)存在不共平面的四點

(2)若 P 點在 xy 平面上的投影點為 Q，則 P 點在 x 軸上的投影點就是 Q 點在 x 軸上的投影點

(3)設 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ 於 B，且 $\overline{BC}\perp\overline{CD}$ 於 C，則 $\overline{AC}\perp\overline{CD}$ 於 C

(4)設直線 L 交平面 E 於 A，若在 E 上過 A 有一直線 L'與 L 垂直，則 L 垂直於平面 E

(5)設兩個半平面 E_1 、E_2 交於直線 L，若 L 垂直於平面 E 於 P 點，又 E 與這兩個半平面 E_1 、E_2 分別交於射線 PQ 與 PR，則 $\angle QPR$ 的大小就是這兩個半平面 E_1 、E_2 所形成兩面角的大小

8. 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$， 若定義：

$\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所形成的<u>有向體積</u>為依序將 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 從第一列寫入行列式，即 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\Delta$，

也就是說，$\overrightarrow{b}$ 、$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所形成的<u>有向體積</u>為 $\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-\Delta$ 。

在此定義下，下列敘述何者正確？

(1) $\overrightarrow{b}$ 、$\overrightarrow{c}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 所形成的<u>有向體積</u>為 $-\Delta$

(2) $2\overrightarrow{a}$ 、$3\overrightarrow{b}$ 與 $-\overrightarrow{c}$ 所形成的<u>有向體積</u>為 -6Δ

(3) $2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}$ 、 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所形成的有向體積為 Δ

(4) $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ 、$6\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 所形成的有向體積為 0

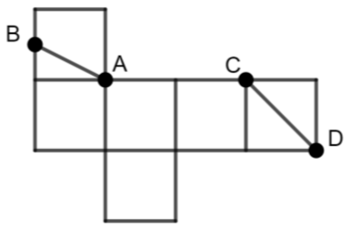
(5) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ 、 $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ 所形成的有向體積為 0

三、填充題：(每格 6 分，占 12 分)

1. 下圖為一正立方體表面的展開圖，A、C、D 是原正立方體的頂點，B 是原正立方體一邊的中點，

設原正立方體中，兩向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的夾角為 θ，

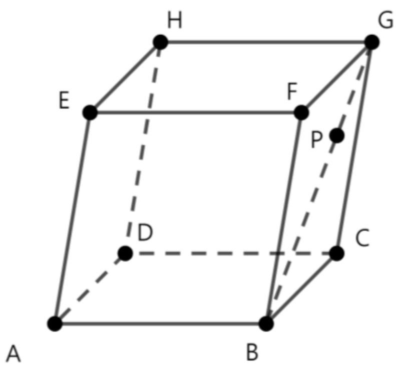
試求 $\cos\theta=$__________ 。



2. 平行六面體 $ABCD$-$EFGH$，如圖所示。設 P 點在線段 $\overline{BG}$ 上使得

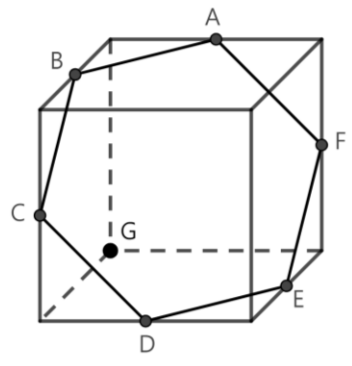
$\overline{BP}:\overline{PG}=2:1$，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AF}+\gamma\overrightarrow{AH}$ ，求序組

$(\alpha,\beta,\gamma)=$__________ 。



四、混合題：(占 16 分，單選題直接寫答案；非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。)

將一條橡皮筋綁在正立方體的各邊中點上，橡皮筋可以形成正六邊形 $ABCDEF$，如圖所示，設 $A(0,0,0)$ ， $B(2,0,0)$ ， $C(3,1,z)$ ， $z>0$ ，試回答下列問題：



1. 將正立方體的各邊分別延長為直線，其中與直線 FE 歪斜的有幾條？(單選題，4 分)

   (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9 (5) 10

2. 求向量 $\overrightarrow{CE}$ 。(非選擇題，6 分)

3. 設正六邊形 $ABCDEF$ 與三角形 GDE 所形成的兩面角為 θ，求 $\cos\theta$ 。(非選擇題，6 分)

台北市立松山高中 110 學年度第二學期　第一次期中考　高二數 A 答案卷

班級：________　座號：________　姓名：______________

一、單選題：(每題 4 分，占 8 分)

1.		2.	

二、多重選擇題：

(每題 8 分，占 64 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1.		2.		3.		4.	
5.		6.		7.		8.	

三、填充題：(每格 6 分，占 12 分)

1.		2.	

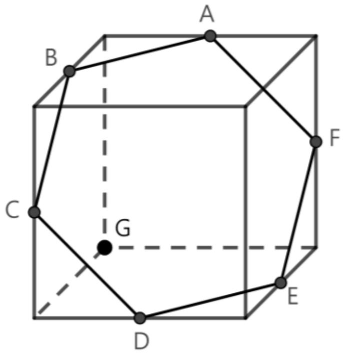
四、混合題：(占 16 分，單選題直接寫答案；非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。)

1.	

(單選題，4 分)

2.(非選擇題，6 分)

3.(非選擇題，6 分)



台北市立松山高中 110 學年度第二學期　第一次期中考　高二數 A 答案卷

班級：________　座號：________　姓名：______________

一、單選題：(每題 4 分，占 8 分)

1.	4	2.	5

二、多重選擇題：

（每題 8 分，占 64 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分）

1.	25	2.	124	3.	35	4.	345
5.	345	6.	12345	7.	125	8.	25

三、填充題：(每格 6 分，占 12 分)

1.	$-\frac{\sqrt{10}}{10}$	2.	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{6})$

四、混合題：(占 16 分，單選題直接寫答案；非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。)

1.	3	(單選題，4 分)

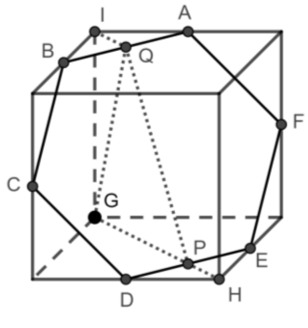
2.(非選擇題，6 分)

$C(3,1,\sqrt{2})$ (2 分)

$E(0,2,2\sqrt{2})$ (2 分)

$\overrightarrow{CE}=(-3,1,\sqrt{2})$ (2 分)

3.(非選擇題，6 分)



(1)

$\overline{AB}=2$

$\Rightarrow \overline{BI}=\overline{IA}=\overline{DH}=\overline{HE}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{IQ}=\overline{PH}=1$

$\Rightarrow \overline{GQ}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

(2 分)

(2) $\overline{GP}=\overline{GH}-\overline{PH}=4-1=3$ (2 分)

(3) 又 $\overline{QP}=2\sqrt{3}$

得 $\cos\angle QPG=\frac{(2\sqrt{3})^2+3^2-3^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2 分)