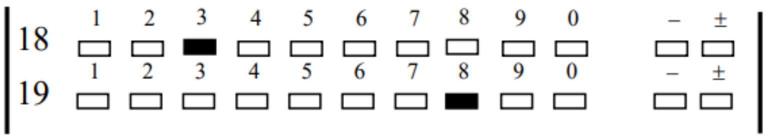
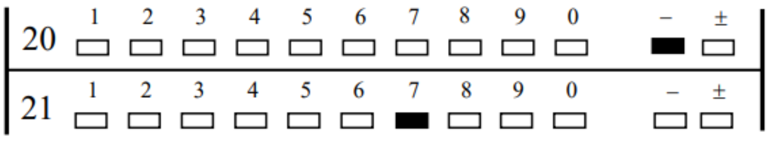
台北市立松山高中　110 學年度第二學期　第一次段考　數學科　試題卷

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是$\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是$\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上劃記如下：



例：若第 C 題的答案格式是$\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是$\dfrac{-7}{50}$，則考生必須分別在答案卡上劃記如下：



第壹部分、選擇(填)題(占 89 分)

一、單選題：(占 20 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題 4 分

1. 靜靜宣稱他可以證明：「$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+1$，對於任意的正整數 n 都成立。」他的完整證明步驟如下：

   第一步：假設 $n=k$（k 為正整數)時，等式成立，即 $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}+1$。

   第二步：則當 $n=k+1$ 時，$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}+1\right]+(k+1)$。

   第三步：$\left[\dfrac{k(k+1)}{2}+1\right]+(k+1)=(k+1)(\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{k+1}+1)$。

   第四步：$(k+1)(\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{k+1}+1)=(k+1)(\dfrac{k+2}{2}+\dfrac{1}{k+1})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}+1$。

   第五步：$\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}+1=\dfrac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}+1$，即當 $n=k+1$ 時，等式亦成立。

   由數學歸納法得證，對於任意正整數 n，$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ 都成立。

   請問上述的證明過程，從哪一個步驟開始出現錯誤？
   (1) 第一步 (2) 第二步 (3) 第三步 (4) 第四步 (5) 第五步

2. 小昱在地面上某定點測得一個 10m 長的旗桿頂端的仰角為 θ_1，對旗桿頂端正下方 1m 及 2m 處重新測得之仰角分別為 θ_2 和 θ_3，請問下列哪一個選項的數值必定依序成等差數列？

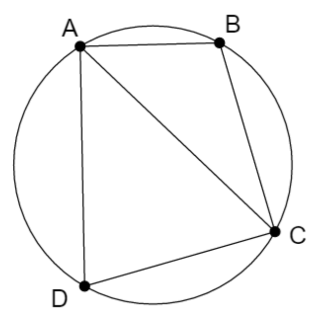
   (1) $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ (2) $\sin\theta_1,\sin\theta_2,\sin\theta_3$ (3) $\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3$ (4) $\tan\theta_1,\tan\theta_2,\tan\theta_3$ (5) $\dfrac{1}{\tan\theta_1},\dfrac{1}{\tan\theta_2},\dfrac{1}{\tan\theta_3}$

3. 已知一圓外切邊長為 10 的正九邊形，試求此圓半徑為何？

   (1) $5\tan 20^\circ$ (2) $5\sin 20^\circ$ (3) $\dfrac{5}{\tan 20^\circ}$ (4) $\dfrac{5}{\sin 20^\circ}$ (5) $5\tan 40^\circ$

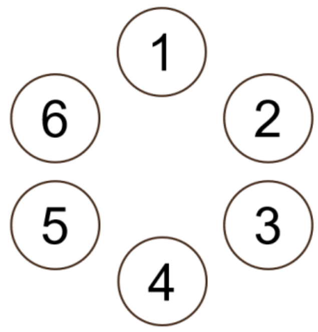
4. 如圖(一)，圓內接四邊形中，$\angle DAC=45^\circ$，$\angle BCA=30^\circ$，$\overline{AB}=4$。求 $\overline{CD}=$？

   (1) 4 (2) $4\sqrt{2}$ (3) $4\sqrt{3}$ (4) $4\sqrt{5}$ (5) $4\sqrt{6}$



圖(一)

5. 如圖(二)，跳動的過程遵循以下規則：
(A)如果所在位置是奇數，那麼下一次移動將往順時針方向跳動 1 格，例如從 3 號跳至 4 號
(B)如果所在位置是偶數，那麼下一次移動將往順時針方向跳動 3 格，例如從 2 號跳至 5 號
若小曾從 1 號位置開始跳動，請問跳動 361 次之後，所在位置是幾號？
(1)1 號 (2)2 號 (3)4 號 (4)5 號 (5)6 號

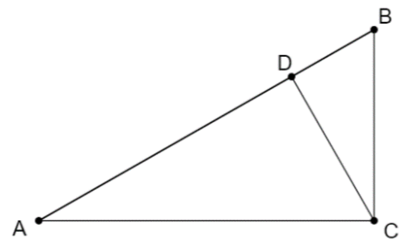


圖(二)

二、多選題：(占 21 分)

說明：第 6 題至第 8 題，每題 7 分。每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 如圖(三)，ΔABC 中，$\angle A \neq \angle B$，已知 $\angle C$ 為直角，$\overline{BC}=1$ 且 $\overline{CD}$ 為斜邊上的高，則下列敘述何者正確？
(1) $\overline{AC}=\tan\angle A$ (2) $\overline{AB}=\dfrac{1}{\sin\angle A}$ (3) $\overline{CD}=\sin\angle A$ (4) $\overline{CD}=\cos\angle A$ (5) $\overline{AD}=\tan\angle B\cdot\cos\angle A$



圖(三)

7. 已知 ΔABC 中，$\angle A=30^\circ$，$\overline{AB}=x$，$\overline{BC}=5$，下列選項何者必正確？
(1)若 $x=3$，則 ΔABC 為鈍角三角形
(2)若 $x=4$，則 ΔABC 可求出唯一的外接圓半徑
(3)若 $x=5$，則 $\angle B=120^\circ$
(4)若 $x=8$，則 $\cos\angle C$ 為定值
(5)若 $x=9$，則 $\angle C$ 有兩種可能且此兩種可能互為補角

8. 已知 a_1,a_2,a_3 為一等差數列，b_1,b_2,b_3 為一等比數列，此六數皆為實數，下列何者正確？
(1) $a_1>a_2$ 與 $a_2<a_3$ 不可能同時成立 (2) $b_1>b_2$ 與 $b_2<b_3$ 不可能同時成立 (3)若 $a_1+a_2>0$，則 $a_2+a_3>0$。
(4)若 $b_1b_2<0$，則 $b_2b_3<0$。 (5)若 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_3=b_3$，則滿足此條件的六位數組 $(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)$ 有無限多組。

三、選填題：(占 48 分)

說明：第 A 題至第 H 題，每題 6 分。

A. $\tan 1200^\circ\times\sin(-420^\circ)+\cos^2 675^\circ=$ ⑨ 。

B. 在《數書九章》中，南宋數學家秦九韶對求三角形面積的方法有以下的闡釋：
「以小斜冪，並大斜冪，減中斜冪，餘半之，自乘於上；以小斜冪乘大斜冪，減上，餘四約之為實，…開平方得積。」

轉用現代的數學符號，在 ΔABC 中三邊長由大至小分別為 a，b，c，面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2c^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}$ 。

事實上，此公式與海龍公式是等價的。則邊長分別為 $\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$ 的三角形面積為 $\dfrac{\sqrt{⑩⑪}}{⑫}$ 。

C. 在坐標平面上，兩直線 L_1 , L_2 的方程式分別為 $x-y+2022=0$ 、$\sqrt{3}x-y+111=0$，兩直線的銳夾角為 $\underline{⑬⑭}^\circ$ 。

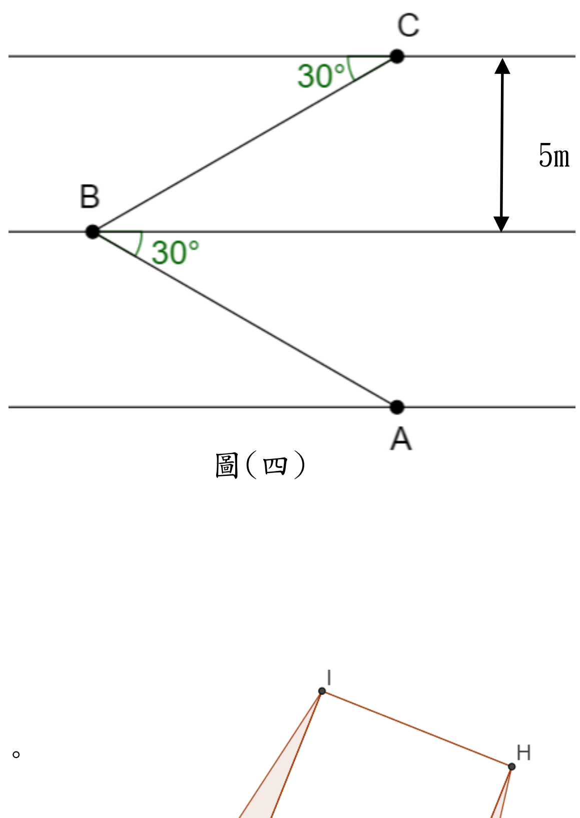
D. 坐標平面上 O 為原點，P,Q 兩點的極坐標分別為 $[13,\alpha]$ 與 $[16,\beta]$。已知 $0^\circ<\alpha-\beta<90^\circ$ 且 ΔOPQ 的面積為 96，

則 $\overline{PQ}=\underline{\sqrt{⑮⑯⑰}}$ 。

E. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases}a_1=2\\ a_{n+1}=a_n+3n\ \ (n\geq 1)\end{cases}$，求此數列的一般項(以 n 表示)。$a_n=\underline{\dfrac{⑱n^2-⑲n+⑳}{㉑}}$

F. 圖(四)為實際上不存在的 2D 橫向電玩遊戲《松高上樓梯 2022》之示意圖。
主角由 $A\to B$ 移動，對手由 $B\to C$ 移動。
已知每層樓高度為 5 公尺。主角移動速度為 3m/s，對手為 1m/s。

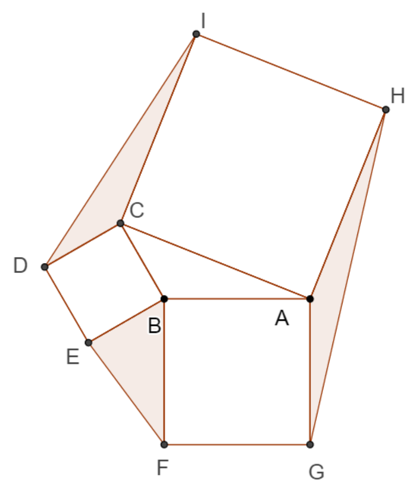
主角與對手同時出發，主角出發 $\underline{\dfrac{㉒㉓}{㉔㉕}}$ 秒後，雙方距離最短。



圖(四)

G. 如圖(五)，在 ΔABC 中，$\overline{AB}=7$ ，$\overline{BC}=4$ ，$\overline{AC}=\sqrt{93}$ ，沿著邊長向外做正方形。

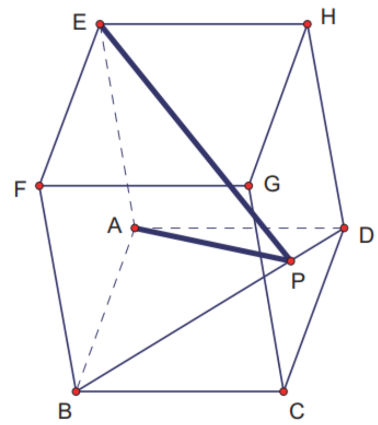
則 ΔAGH 面積 $+\Delta BEF$ 面積 $+\Delta CDI$ 面積為 $\underline{㉖㉗\sqrt{㉘}}$ 。



圖(五)

H. 如圖(六)，一個邊長為 30 的正立方體，已知 $\overline{BP}:\overline{PD}=5:1$，

則 $\tan\angle APE=\dfrac{㉙\sqrt{㉚㉛}}{㉜㉝}$。(化至最簡根式)

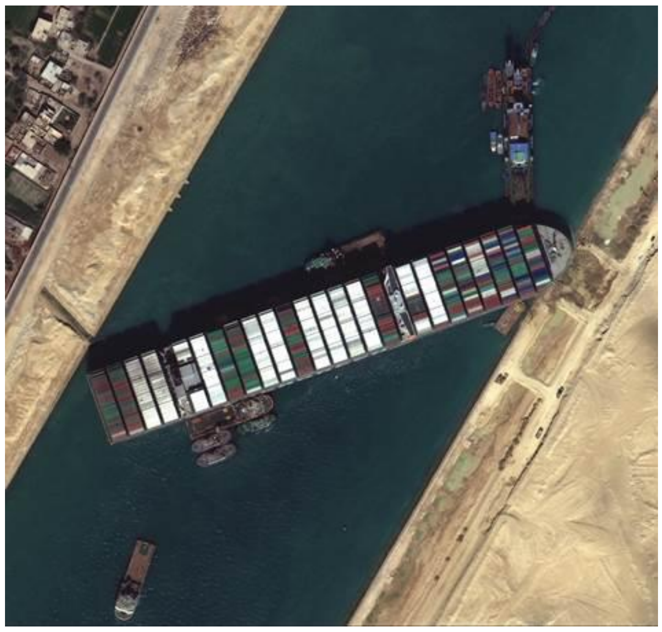


圖(六)

第貳部分、混合題(占 11 分)

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。非選擇題請由左而右橫式書寫，**作答時必須寫出計算過程或理由**，否則將酌予扣分。

位在埃及的蘇伊士運河於 1869 年正式通航，為世界上最重要的水上航路之一。2021 年 3 月 23 日埃及標準時間上午 7 時 40 分，400 公尺長的長榮海運貨櫃船長賜輪在蘇伊士運河擱淺。擱淺的河段恰屬未擴建區域，河道窄小，因此其他船隻無法繞行。造成超過 300 艘船隻排隊等候，而航道堵塞期間蘇伊士運河管理局每天的運河營運收入減少約 1400 萬至 1500 萬美元，此次塞河事件後續更被網友戲稱「大排長榮」。



(1) 假設兩條河岸線為平行線，並將長賜輪視為一長方形(船頭圓弧狀忽略不計)，長方形的一組對角頂點恰與河岸線接觸，請將右圖中長賜輪的俯視空拍圖轉換成幾何圖形並畫在答題卷當中，並將各項長度標示在圖形上。(作圖題，4 分)

(2) 若河道寬約 300 公尺，長賜輪全長約 400 公尺、全寬約 60 公尺，請根據給定的三角函數值，試求船體(長邊)與河岸線的銳夾角。(已知 $\tan 8.53^\circ \cong 0.15$，$\sin 47.88^\circ \cong \dfrac{15}{\sqrt{409}}$)(計算題，7 分)

試題結束