

臺北市立松山高中 110 學年度第一學期 高三自然班群 期末考 數學科 試題卷

一、單選題：(每題 6 分，共 12 分)

1. 請計算定積分 $\int_0^2 (2 + \sqrt{4-x^2}) dx$ 的值為何？

- (A) 4π (B) 2π (C) $2\pi + 4$ (D) $2\pi + 2$ (E) $\pi + 4$

2. 下列何者為函數 $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 的反導函數？

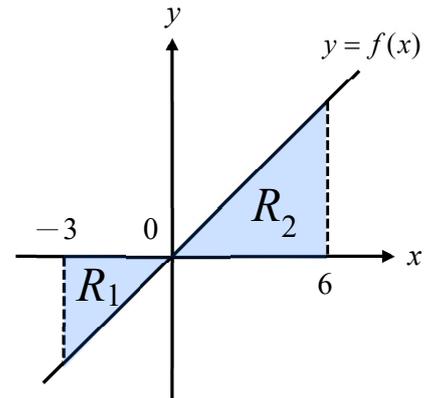
- (A) $3x^2 - 2x - 1$ (B) $6x^2 - 4x - 1$ (C) $x^3 - x^2 - x + 1$ (D) $6x - 2$ (E) $\int_1^x (6t - 2) dt$

二、多選題：(每題 8 分，共 24 分。錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上得 0 分)

1. 設函數 $f(x) = x$ 與 $y = 0$ ， $x = -3$ 及 $x = 6$ 所圍成的區域分別為 R_1 及 R_2 ，

如右圖。區域 R_1 ， R_2 的面積分別為 A_1 及 A_2 ，下列敘述何者正確？

- (A) $A_1 = \int_0^{-3} x dx$
 (B) $A_2 = \int_0^6 x dx$
 (C) $A_1 + A_2 = \int_{-3}^6 x dx$
 (D) $A_2 = 2A_1$
 (E) $A_2 = 4A_1$

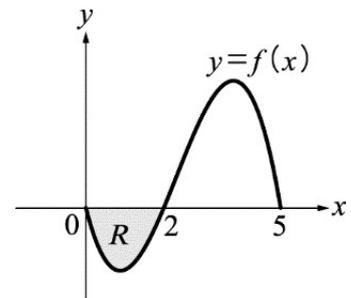


2. 設函數 $f(x) = x^2$ 之圖形與 $y = 0$ ， $x = 0$ ， $x = 2$ 所圍成的區域為 S 。今將區間 $[0, 2]$ 分割成 n 等分，得 n 個等寬的長條，令此 n 個長條之上矩形面積和（上和）為 U_n ，下矩形面積和（下和）為 L_n ，則下列哪些選項正確？

- (A) $L_2 = 1$
 (B) $U_3 = \frac{112}{27}$
 (C) $U_n - L_n = \frac{8}{n}$
 (D) $L_n \leq S$ 的面積 $\leq U_n$
 (E) S 的面積為 8

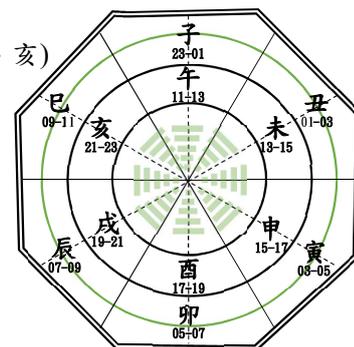
3. 實係數多項式函數 $f(x)$ 在 $[0, 5]$ 上的圖形如圖，其中 R 區域的面積為 1，且 $\int_0^5 f(x) dx = 4$ ，下列選項何者正確？

- (A) $\int_0^2 f(x) dx = 1$
 (B) $\int_2^5 f(x) dx = 3$
 (C) $\int_0^5 |f(x)| dx = 6$
 (D) $\int_0^2 (-3f(x)) dx = 3$
 (E) $\int_0^5 (f(x) + 1) dx = 9$



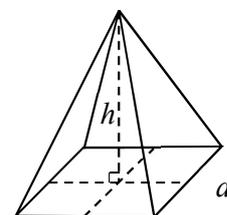
三、填充題：(每題 6 分，共 54 分)

1. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式，若 $f(x) = x^2 + 2x - \int_0^1 f(x) dx$ ，試求 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為實係數多項式函數，且 $\int_1^5 f(x) dx = 8$ ， $\int_5^7 f(x) dx = -5$ ， $\int_1^7 g(x) dx = 2$ ，試求 $\int_1^7 [2f(x) - 3g(x)] dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 3^4 + 5^4 + \dots + (2n-1)^4}{n^5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 求不定積分 $\int (3x^2 - 2x + 1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 求定積分 $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 函數 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ 與 $g(x) = x^2 + 2x + 1$ 的圖形所圍區域的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 求 $y = x^2 + 2x$ 的圖形介於 $x = 0$ ， $x = 1$ 與 x 軸所圍成的區域，繞 x 軸旋轉的旋轉體體積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 善於利用時間的祥祥於凌晨 2 點開車在看不到終點的公路起點一路飄向北方，祥祥 t 小時後的車速為 $v(t) = -t^3 + 2t^2 + 40t$ (公里/小時)，宏宏於凌晨 3 點一邊開車一邊打哈欠從相同起點沿著相同路徑以等速度火力全開追上祥祥，請問宏宏若要在凌晨 6 點前追上祥祥，車速至少應該為 $\underline{\hspace{2cm}}$ (公里/小時)。(無條件進位至整數，才不可能錯過祥祥)
9. 承上題，若速度為負代表反方向行駛，則祥祥在 $\underline{\hspace{2cm}}$ 時可回到公路的起點。
(以十二地支回答，十二地支：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥)



四、計算證明題：(每題 10 分，共 10 分)

1. 利用「積分的方法」證明：底面為邊長 a 的正方形，高度為 h 的四角錐(如圖)，體積為 $\frac{1}{3} a^2 h$ 。



臺北市立松山高中 110 學年度第一學期 高三自然班群 期末考 數學科 答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題：(每題 6 分，共 12 分)

1.	2.
E	C

二、多選題：(每題 8 分，共 24 分。錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上得 0 分)

1.	2.	3.
ABE	ABCD	CDE

三、填充題：(每題 6 分，共 54 分，依題號由左至右，由上到下之順序填答)

1.	2.	3.
$\frac{7}{3}$	0	$\frac{16}{5}$
4.	5.	6.
$x^3 - x^2 + x + c$ ， c 為任意常數	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}$
7.	8.	9.
$\frac{38}{15}\pi$	100	午

四、計算證明題：(每題 10 分，共 10 分)

1. 利用「積分的方法」證明：底面為邊長 a 的正方形，高度為 h 的四角錐(如圖)，體積為 $\frac{1}{3}a^2h$ 。

設高度為 x 時，截面邊長為 s ，其中 $0 \leq x \leq h$ ，

由相似形(如圖)可得 $\frac{s}{a} = \frac{x}{h} \Rightarrow s = \frac{a}{h}x$ 。 ---- (2 分)

此時截面面積 $A(x) = \frac{a^2}{h^2}x^2$ ， ---- (2 分)

所求角錐的體積為 $\int_0^h A(x)dx = \int_0^h \left(\frac{a^2}{h^2}x^2\right)dx$ ---- (2 分)

$$= \left(\frac{a^2}{3h^2}x^3\right)\Big|_0^h \quad \text{---- (2 分)}$$

$$= \frac{1}{3}a^2h \quad \text{---- (2 分)}$$

