

臺北市立松山高級中學 110 學年度第 1 學期第 1 次期中考高三社一班群數學試卷

一、單選題：（每題 4 分，共 12 分）

1. 試問下列何者極限不存在？

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^n + (-1)^n}{2} \right)$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3^n}{7^n}$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 - 1}$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{103} - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$

(E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$

2. 試選出正確的選項。

(A) $\sum_{k=1}^n (a_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k \times \sum_{k=1}^n a_k$

(B) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k}$

(C) $\sum_{k=1}^n (k \cdot a_n) = n \cdot \sum_{k=1}^n a_n$

(D) $\sum_{k=1}^n |a_k - 1| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - n \right|$

(E) $1 - \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n (1 - a_k)$

3. 函數 $f(x)$ 圖形如右，試問 $(f \circ f)(2)$ 值為何？

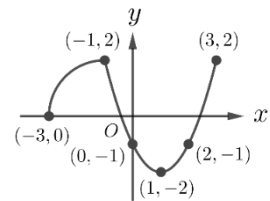
(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2



二、多選題：（每題 6 分，共 18 分。錯 1 個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個以上得 0 分）

1. 試選出正確的選項。

(A) 數列 $\langle (-1)^n \rangle$ 的極限為 1 與 -1

(B) 數列 $\langle \sin n\pi \rangle$ 收斂

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = 1$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$

(E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{3n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{3n}$

2. 下列關於極限的敘述，試選出正確的選項。

(A) 若 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\langle a_n^2 \rangle$ 亦為收斂數列

(B) 若 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列，則 $\langle |a_n| \rangle$ 亦為發散數列

(C) 若 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列，則 $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ 為收斂數列

(D) 若 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle a_n - 5b_n \rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle b_n \rangle$ 亦為收斂數列

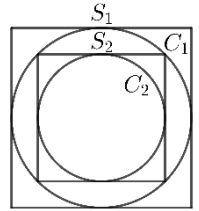
(E) 若 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle$ 為收斂數列，則 $\langle b_n \rangle$ 亦為收斂數列

3. 下列關於函數的敘述，試選出正確的選項。
- (A) $(f \circ f)(4) = f(2) \times f(2)$
- (B) $(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0)$
- (C) 函數 $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的值域為 $\{-1, 0, 1\}$
- (D) 高斯函數 $G(x) = [x]$ 為奇函數
- (E) 在 $0 \leq x \leq \pi$ ，函數 $s(x) = \sin x$ 的圖形凹口向下

三、填充題：（每題 7 分，共 56 分）

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5+3+1+\cdots+(7-2n)}{4n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3+9-\cdots+(-3)^{n-1}}{4^n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 設級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^n}{3^{n+1}}$ 收斂，則 x 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 循環小數 $1.0\overline{13}$ 化為最簡分數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 設函數 $f(x) = \begin{cases} [x] - x, & x \geq 0 \\ x - |x|, & x < 0 \end{cases}$ ，則 $(f \circ f)(\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等差數列，已知 $a_1 + a_5 = 34$ ， $a_3 + a_6 + a_9 = 105$ 。令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 有一機器人自數線上的原點出發，機器人先向右前進 10 單位，再向左後退 5 單位，再向右前進 $\frac{5}{2}$ 單位，再向左後退 $\frac{5}{4}$ 單位，然後重複依序向右前進、向左後退的方式移動，且每次移動的距離都是前一次距離的一半。經過無數次的移動後，最後機器人會趨近於數線上的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 如右圖， $ABCD$ 為邊長 10 的正方形 S_1 ，在 S_1 做一內接圓 C_1 ，接著在圓 C_1 做一內接正方形 S_2 ，然後在正方形 S_2 再做一內接圓 C_2 ，重複以上步驟會得到無窮多個圓，則所有這些圓的面積總和為_____。



四、計算題：（共 14 分）

1. 設一無窮等比級數和為 $\frac{9}{2}$ ，第二項為 -2 ，試求：（ $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）

(1) 第一項。(2 分) (2) 前 n 項和 S_n 。(3 分)

(3) 滿足 $|S - S_n| < \frac{1}{10000}$ 的最小正整數 n 。(3 分)

2. 一款手機電量顯示分為 6 個不同狀態，如下表：

電量 $x\%$	$0 \leq x < 10$	$10 \leq x < 28$	$28 \leq x < 46$	$46 \leq x < 64$	$64 \leq x < 82$	$82 \leq x < 100$
狀態 y 格	0	1	2	3	4	5

若將上述關係表示為函數 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 10 \\ 1 + [a(x-b)], & 10 \leq x < 100 \end{cases}$ ，則：

- (1) 試描繪函數 $f(x)$ 的圖形。(3 分)
 (2) 試求數對 (a, b) 。(3 分)

臺北市立松山高級中學 110 學年度第 1 學期第 1 次期中考高三社一班群數學答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、 單選題：（每題 4 分，共 12 分）

1	2	3

二、 多選題：（每題 6 分，共 18 分。錯 1 個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個以上得 0 分）

1	2	3

三、 填充題：（每題 7 分，共 56 分）

1	2	3	4
5	6	7	8

四、 計算題：（共 14 分）

1.(1) (2 分) (2) (3 分) (3) (3 分)	2.(1) (3 分) (2) (3 分)
---------------------------------	-----------------------

臺北市立松山高級中學 110 學年度第 1 學期第 1 次期中考高三社一班群數學答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、 單選題：（每題 4 分，共 12 分）

1	2	3
A	E	E

二、 多選題：（每題 6 分，共 18 分。錯 1 個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個以上得 0 分）

1	2	3
BD	AD	CE

三、 填充題：（每題 7 分，共 56 分）

1	2	3	4
$-\frac{1}{4}$	$\frac{4}{21}$	$-1 < x < 2$	$\frac{1003}{990}$
5	6	7	8
$2 - 2\sqrt{2}$	3	$\frac{20}{3}$	50π

四、 計算題：（共 14 分）

<p>1.(1) (2 分) 6</p> <p>(2) (3 分) $\frac{9}{2} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]$</p> <p>(3) (3 分) 10</p>	<p>2.(1) (3 分) 略</p> <p>(2) (3 分) $\left(\frac{1}{18}, 10\right)$</p>
--	--