

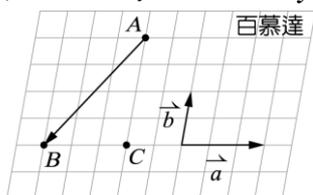
# 臺北市立松山高級中學 109 學年度第一學期高二數 A 期末考試卷

範圍：平面向量

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

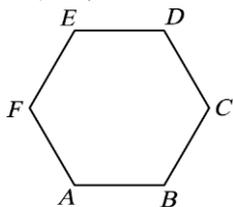
## 一、單一選擇題(每題 5 分，共 10 分)

- ( ) 1. 如下圖，傳說中船駛達百慕達三角洲時，須遵循下列兩個怪異磁場  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  的方向；否則會神奇失蹤。今一艘救援艇已開到此海域 A 處，準備前往 B 處尋找一艘載滿黃金的船。若欲完成任務，它應遵循圖示  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  的方向，走了  $x\vec{a} + y\vec{b}$ ， $x, y$  是實數，則下列何者正確？



- (1)  $x=1, y=2$     (2)  $x=1, y=-2$     (3)  $x=-1, y=2$   
 (4)  $x=-1, y=-2$     (5)  $x=-2, y=-1$ 。

- ( ) 2. 如下圖， $ABCDEF$  為一正六邊形，則下列向量內積中何者最小？

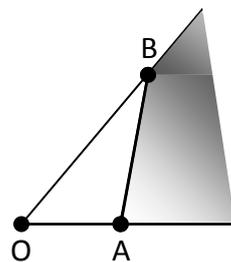


- (1)  $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$     (2)  $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$     (3)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$     (4)  $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$     (5)  $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ 。

## 二、多重選擇題(每題 8 分，共 32 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個(含)以上得 0 分)

- ( ) 1. 如圖，平面兩射線  $OA$  與  $OB$  交於  $O$  點，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 若  $\vec{OP} = 2021\vec{OA} - 2020\vec{OB}$ ，則  $P$  點在直線  $AB$  上  
 (2) 若  $\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB}$ ，則  $P$  點落在圖中陰影區域內  
 (3) 若  $\triangle OAB$  的外心為  $Q$ ，則  $\vec{AQ} \cdot \vec{AO} = \frac{1}{2}|\vec{AO}|^2$   
 (4) 若  $\triangle OAB$  的面積為 4， $P$  點為  $\triangle OAB$  內部一點(含邊界)，且



$$\vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{OA} + t\vec{OB}, t \in \mathbb{R}, \text{ 則 } \triangle OBP \text{ 的面積恆為 } 1$$

- (5) 設  $\vec{OA} = (1, 2)$ ， $\vec{OB} = (3, 4)$ ，則滿足  $\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$ ， $0 \leq \alpha \leq 2$ ， $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$

的  $P$  點圖形所形成的面積為 4

( ) 2. 設  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  為平面上的非零向量，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 若  $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，則  $\vec{a} = \vec{b}$

(2) 若  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ，則  $\vec{a} = t\vec{b}$ ， $t$  為大於等於零之實數

(3) 若  $\vec{a}$  在  $\vec{c}$  的正射影長度與  $\vec{b}$  在  $\vec{c}$  的正射影長度相等，則  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

(4)  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leq |\vec{a} \cdot \vec{b}|$

(5) 若  $\vec{a}$  為直線  $2x + y - 3 = 0$  的一個法向量，則  $\vec{a} \parallel (2, 1)$

( ) 3. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 120^\circ$ ， $D$  為  $\overline{AB}$  的中點，且  $\overline{AB} = 2$ ， $E$  在  $\overline{AC}$  上，且  $\overline{AC} = 3$ 、

$\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 1$ ， $\overline{CD}$  與  $\overline{BE}$  交於  $P$ ， $\overline{AP}$  延長線交  $\overline{BC}$  於  $F$ ，設  $\overline{AP} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，

試問下列哪些選項是正確的？

(1)  $x + y = \frac{3}{4}$

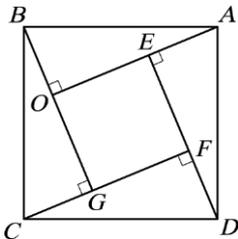
(2)  $\overline{BP} : \overline{PE} = 1 : 3$

(3)  $\frac{\triangle BPC \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{1}{4}$

(4)  $\overline{AB} \cdot \overline{CA} = -3$

(5)  $\overline{AB} \cdot \overline{AF} = -\frac{2}{3}$

( ) 4. 如下圖，大正方形  $ABCD$  由四個全等的直角三角形與一個小正方形  $OEFG$  所拼成，其中  $\overline{OA} = 12$ ， $\overline{OB} = 5$ ，試問下列哪些選項是正確的？



(1)  $\overline{GB} \cdot \overline{OA} = \vec{0}$

(2)  $\overline{OA} \cdot \overline{OF} < \overline{OD} \cdot \overline{OA}$

(3)  $\overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{OG}$

(4) 若  $\vec{v} = 5\overline{OA} + 12\overline{OB}$ ，則  $\frac{\overline{OA} \cdot \vec{v}}{|\overline{OA}| |\vec{v}|} = \frac{\overline{OB} \cdot \vec{v}}{|\overline{OB}| |\vec{v}|}$

(5)  $\overline{BD} = \frac{7}{12}\overline{OA} - \frac{17}{5}\overline{OB}$ 。

三、填充題(每格 6 分，共 48 分)

1. 設  $\vec{a} = (2, 4)$ ， $\vec{b} = (1, 1)$ ， $\vec{c} = a\vec{a} + b\vec{b}$ ，則  $|\vec{c}|$  的最小值為\_\_\_\_\_。

2. 平行四邊形  $ABCD$  中， $|\vec{AB}| = 4$ ， $|\vec{BC}| = 6$ ，求  $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ \_\_\_\_\_。

3. 坐標平面上以原點  $O$  為圓心的單位圓(半徑為 1)上三相異點  $A$ 、 $B$ 、 $C$  滿足

$$2\vec{OA} + 3\vec{OB} + 4\vec{OC} = \vec{0}，試求 \cos \angle AOB = \underline{\hspace{2cm}}。$$

4. 過  $\triangle ABC$  的重心  $G$  的一直線  $L$  與  $\vec{AB}$ 、 $\vec{AC}$  分別交於  $D$ 、 $E$ ，已知  $|\vec{AD}| : |\vec{DB}| = 4 : 1$ ，

$$\text{則 } |\vec{AE}| : |\vec{EC}| = \underline{\hspace{2cm}}。$$

5. 設  $a$ 、 $b$  為實數，已知  $\vec{OA} = (a, b)$ ， $|\vec{OA}| = 5\sqrt{2}$ ， $\vec{OB} = (1, 1)$ ，設  $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$  的夾角為銳角，

且  $\vec{OA}$ 、 $\vec{OB}$  所張成的平行四邊形面積為 8，則  $\vec{OA}$  在  $\vec{OB}$  上的正射影為\_\_\_\_\_。

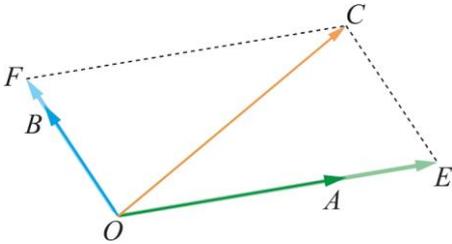
$$6. \text{ 已知 } \begin{vmatrix} -a & 3b \\ -c & 3d \end{vmatrix} = 12, \begin{vmatrix} a+p & 2a-p \\ c+q & 2c-q \end{vmatrix} = 9, \begin{vmatrix} 3b-p & 2b \\ 3d-q & 2d \end{vmatrix} = 10,$$

若方程組  $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$  的解為  $x = x_0$ 、 $y = y_0$ ，試求  $x_0 + y_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 如下圖所示， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ， $\overrightarrow{OE} = x\vec{a}$ ， $\overrightarrow{OF} = y\vec{b}$ ，且  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  所張成的平行四邊形面積為 5， $\vec{a}$ 、 $\vec{c}$  所張成的平行四邊形面積為 6，

$\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  所張成的平行四邊形面積為 7，試求數對  $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

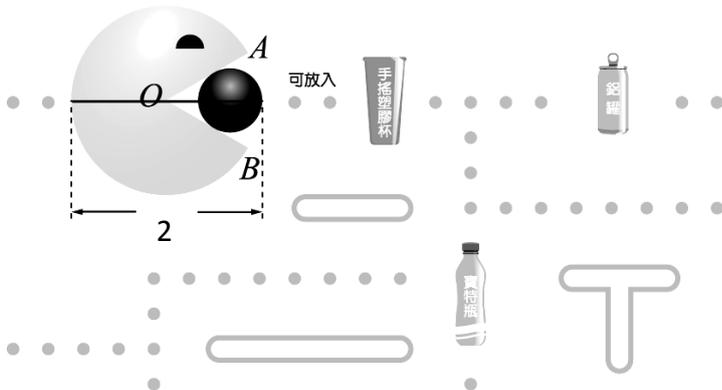


8. 在  $\triangle ABC$  中，已知三邊長  $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AB} = 7$ 。若  $\vec{a}$  為單位向量， $|\vec{b}| = 5$ ，且

$\vec{a} \perp \overline{BC}$ ， $\vec{b} \perp \overline{AC}$ ，則  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

#### 四、計算題(共 10 分)

- 某城市欲設置自動資源回收機，邀請街頭藝術家小松在機器外箱上要畫一個卡通圖案，如圖所示，整張圖的寬度需為 2 公尺，小圓與大圓的兩半徑  $OA$ ， $OB$  均相切，且  $\angle AOB = 60^\circ$ 。
  - 設小圓半徑為  $x$  公尺，大圓半徑為  $y$  公尺，試將寬度 2 公尺以  $x$ 、 $y$  表示。(2 分)
  - 若漆大圓每平方公尺需 120 元，漆小圓每平方公尺需 900 元，試以  $x$ 、 $y$  表示漆該圖案所需花費。(2 分)
  - 承上，試問當兩圓的半徑分別為多少公尺時的花費為最小？(需求出最小花費)(6 分)



臺北市立松山高級中學 109 學年度第一學期高二數學 A 期末考答案卷

組別	高二 數 A	班級		座號		姓名		得分	
----	-----------	----	--	----	--	----	--	----	--

一、單一選擇題(每題 5 分，共 10 分)

1	2

二、多重選擇題(每題 8 分，共 32 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個(含)以上得 0 分)

1	2	3	4

三、填充題(每格 6 分，共 48 分)

1	2	3	4
5	6	7	8

四、計算題(共 10 分)

1.

The diagram shows a large gray circle with center  $O$ . A smaller black circle is tangent to the large circle at point  $A$ . A horizontal line segment from  $O$  to the point of tangency is labeled  $2$ . Point  $B$  is on the large circle, and a vertical dashed line segment from  $B$  to the horizontal line is also labeled  $2$ .

臺北市立松山高級中學 109 學年度第一學期高二數學 A 期末考答案卷

組別	高二 數 A	班級		座號		姓名		得分	
----	-----------	----	--	----	--	----	--	----	--

一、單一選擇題(每題 5 分，共 10 分)

1	2
4	2

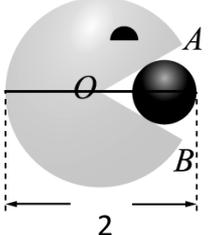
二、多重選擇題(每題 8 分，共 32 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個(含)以上得 0 分)

1	2	3	4
(1)(2)(3)(4)(5)	(2)(5)	(1)(3)(5)	(3)(4)(5)

三、填充題(每格 6 分，共 48 分)

1	2	3	4
$\sqrt{2}$	20	$\frac{1}{4}$	4:3
5	6	7	8
(3, 3)	2	$(\frac{7}{5}, \frac{6}{5})$	$\pm 1$

四、計算題(共 10 分)



(1) 設小圓圓心為  $C$ ，半徑為  $x$ ，大圓半徑為  $y$ ， $D$  為  $\overline{OA}$  與小圓的切點。因為  $\overline{CD} = x$ ，且  $\angle COD = 30^\circ$ ，所以  $\overline{OC} = 2x$ ，因此得  $x + 2x + y = 2$ ，即  $3x + y = 2$ 。(2 分)

(2) 油漆費用為  $900 \cdot \pi x^2 + 120 \cdot \frac{300}{360} \pi y^2 = 100\pi (9x^2 + y^2)$ 。(2 分)

(3) 由柯西不等式得  $((3x)^2 + y^2)(1^2 + 1^2) \geq (3x + y)^2$ ，又  $3x + y = 2$ ，代入上式得  $(9x^2 + y^2) \cdot 2 \geq 2^2$ ，即  $9x^2 + y^2 \geq 2$ (2 分) 等號成立於  $\frac{3x}{1} = \frac{y}{1}$  時，令  $x = k$ ， $y = 3k$  代入  $3x + y = 2$ ，得  $3k + 3k = 2$ ，得  $k = \frac{1}{3}$ 。

當  $x = \frac{1}{3}$  (公尺) (1 分)， $y = 1$  (公尺) 時(1 分)，油漆費用  $100\pi (9x^2 + y^2)$  有最小值  $200\pi$  (元) (2 分)