

臺北市立松山高中 109 學年度第一學期 高一 數學 第一次期中考 試題卷

一、單選題：(每題 5 分，總共 20 分)

() 1. 已知 $a = \frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{7}}{5}$ ， $b = \frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{7}}{7}$ ， $c = \frac{4\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{9}$ ，則 a 、 b 、 c 的大小關係為何？

(A) $a > b > c$ (B) $c > a > b$ (C) $c > b > a$ (D) $b > c > a$ (E) $a > c > b$

() 2. 設 $\log a = 1.02$ ，則 $0.01^{0.01}$ 的值為下列何者？

(A) $2a$ (B) $\frac{1}{a}$ (C) $10a$ (D) $\frac{10}{a}$ (E) $\frac{a}{10}$

() 3. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，若正實數 x ， y 滿足 $\log x = 2.8$ ， $\log y = 5.6$ ，則 $\log(x^2 + y)$ 最接近下列哪一個選項的值？

(A) 2.8 (B) 5.6 (C) 5.9 (D) 8.4 (E) 11.2

() 4. 已知 7^{100} 與 11^{100} 各為 85 與 105 位數，則 77^{25} 為幾位數？

(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48

二、多選題：(每題 6 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上得 0 分，總共 12 分)

() 1. a ， b ， c ， d 均為有理數，且 $abcd \neq 0$ ， x ， y 均為無理數，則下列敘述何者正確？

(A) $a+bx$ 為無理數 (B) xy 為無理數 (C) 若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ ，則 $a=c$ ， $b=d$

(D) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ 為無理數 (E) 若 $a+x=b+y$ ，則 $a=b$ ， $x=y$

() 2. 設 x ， y 為實數，若 $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$ ， $|y-1| < 1$ ，則下列何者正確？

(A) $-2 < x+y < 3$ (B) $-1 < y-x < 4$ (C) $0 < xy < 2$ (D) $-4 < 2x-y < 0$

(E) $1 < x^2 + y^2 < 8$

三、填充題：(每題 5 分，全對才給分，總共 50 分)

1. 試以最簡分數表示 $1.5\overline{4} + 0.4\overline{6} =$ 【 】。

2. $a > 0$ ，若 $\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}}} \times \sqrt[4]{a^9} = a^x$ ，則 $x =$ 【 】。

3. 若 $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = a+b$ ， a 為正整數， $0 \leq b < 1$ ，求 $a - \frac{1}{b}$ 的值 = 【 】。

4. 設 $a = \sqrt[3]{\sqrt{8}}$ ， $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ ， $c = \sqrt[4]{2\sqrt{64}}$ ，則 $\frac{a^2 c^3}{b} =$ 【 】。

5. 設 x 、 y 為實數且 $4^x = 5^y = 10$ ，則 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} =$ 【 】。

6. 若 $0 < x < 1$ ，且 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，則 $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} =$ 【 】。

7. 已知 A, B, P 為數線上三相異點，且坐標分別為 $3, 6, x$ ，若 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : \sqrt{2}$ ，則 P 點的坐標 x 為【 】。

8. x 為實數，若 $|x-1| + 2|x+2| + 3x = 6$ ，則 $x =$ 【 】。

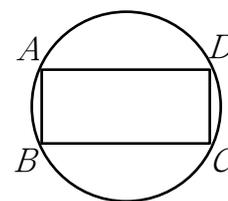
9. 設 a, b 為實數，若 $|ax+2| \leq b$ 的解為 $-2 \leq x \leq 4$ ，則 $a+b =$ 【 】。

10. 設 a 為 1 至 9 的正整數，且 $\frac{2}{9} < 0.2\overline{a1} < \frac{23}{99}$ ，則 $a =$ 【 】。

四、計算與證明題：(務必在答案格內寫出詳細過程，否則不予計分，總共 18 分)

1. 已知 a 為有理數， b 為無理數，試證明： $a+b$ 為無理數。(5 分)

2. 在半徑 6 公尺的圓中開闢一個內接矩形 $ABCD$ 的苗圃。試問此苗圃的最大面積為多少？(5 分)



3. 美國地震學家芮希特 (Richter) 根據地震紀錄儀所記錄地震波振幅的大小推估得地震的動能，這就是地震上所稱的芮氏地震規模 (M)。地震規模 (M) 與能量 (E, 焦耳) 的關係為：

$\log E = 5.24 + 1.44M$ ，其中 E：能量(單位：焦耳)，M：地震規模。

(1) 921 大地震，又稱集集大地震，發生於 1999 年 9 月 21 日上午 1 時 47 分 15.9 秒，地震震央位在南投縣集集鎮 (北緯 23.8 度、東經 120.78 度)，即日月潭西偏南 9.2 公里，地震規模為 7.3，試問 921 大地震所釋放出的能量 E (單位：焦耳) 為 10 的幾次方？(4 分)

(2) 921 大地震所釋出的能量約為 1998 年嘉義瑞里地震的 40 倍，試問嘉義瑞里地震的地震規模為多少？(四捨五入至小數點以下第一位， $\log 2 \approx 0.3010$) (4 分)

臺北市立松山高中 109 學年度第一學期 高一 數學 第一次期中考答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題：(每題 5 分，總共 20 分)

1	2	3	4
A	D	C	D

二、多選題：(每題 6 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個選項以上得 0 分，總共 12 分)

1	2
AC	AB

三、填充題：(每題 5 分，全對才給分，總共 50 分)

1	2	3	4	5
$\frac{332}{165}$	1	$-\sqrt{2}$	2	2
6	7	8	9	10
$-\sqrt{5}$	$3\sqrt{2}$ 或 $-3\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$	4	3

四、計算與證明題：(務必在答案格內寫出詳細過程，否則不予計分，總共 18 分)

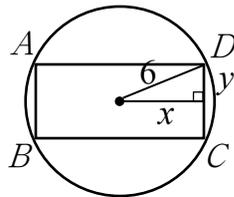
1. (5 分)

證：

假設 $a+b$ 為有理數，令 $a+b=k$ ， $k \in Q$
 $\Rightarrow b=k-a \in Q$ (\because 有理數 - 有理數 = 有理數(封閉性))
 與已知 b 為無理數產生矛盾
 故 $a+b$ 為無理數

2. (5 分)

令矩形 $ABCD$ 苗圃長為 $2x$ 公尺，
 寬為 $2y$ 公尺 ($x > 0$ 且 $y > 0$)
 矩形苗圃面積為 $4xy$



由圖可知 $x^2 + y^2 = 6^2$

利用算幾不等式

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{6^2}{2} \geq xy$$

$$\Rightarrow 4xy \leq 4 \cdot \frac{6^2}{2} = 72 \quad \therefore \text{苗圃最大面積為 } 72 \text{ 平方公尺}$$

答: 72 平方公尺

3.(1) (4 分)

$$\begin{aligned} M_{921} &= 7.3 \\ \Rightarrow \log E_{921} &= 5.24 + 1.44 \times 7.3 \\ \Rightarrow \log E_{921} &= 5.24 + 10.512 = 15.752 \\ \Rightarrow E_{921} &= 10^{15.752} \end{aligned}$$

3.(1)答：15.752

3.(2) (4 分)

$$\begin{aligned} \log 2 &\approx 0.3010 \Rightarrow 2 \approx 10^{0.3010} \Rightarrow 4 = 2^2 \approx 10^{0.6020} \\ \therefore \frac{E_{921}}{E_{瑞里}} &= 40 \quad \therefore E_{瑞里} = \frac{E_{921}}{40} \approx \frac{10^{15.752}}{10^{0.6020} \times 10^1} = 10^{14.150} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \log E_{瑞里} = 5.24 + 1.44 M_{瑞里} = 14.150$$

$$\Rightarrow M_{瑞里} = \frac{14.150 - 5.24}{1.44} = \frac{8.910}{1.44} \approx 6.18 \approx 6.2$$

3.(2)答：6.2