

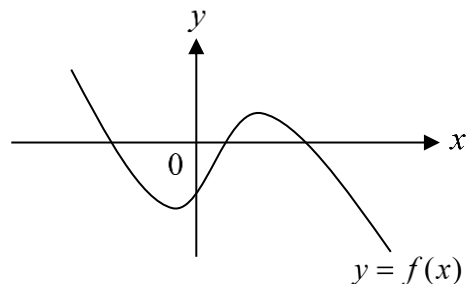
臺北市立松山高中 108 學年度第二學期高三自然組期末考數學科試卷

一、單選題：(每題 6 分，共 18 分)

1. 請計算定積分 $\int_{-2}^0 (2 - \sqrt{4 - x^2}) dx$ 的值為何？
(A) $2 - \pi$ (B) $4 - \pi$ (C) $\pi - 2$ (D) $\pi - 4$ (E) $4 - 2\pi$ 。
2. 設函數 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 1, & x < 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 可微分，則 (a, b) 的值為何？
(A) $(-2, 5)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(2, -3)$ (D) $(2, 1)$ (E) $(4, -7)$ 。
3. 設 $y = f(x) = x^2$, $x = 0, x = 1$ 的圖形與 x 軸所圍的區域面積為 R ，若將區間 $[0, 1]$ 分割為 n 等分所得下和為 L_n ，則滿足 $|R - L_n| < 0.01$ 的最小正整數 n 為何？
(A) 49 (B) 50 (C) 51 (D) 52 (E) 53。

二、多選題：(每題 8 分，共 32 分。錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上得 0 分)

1. 關於多項式 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ ，請選出正確的選項。
(A) $f(x)$ 有兩個相對極值，分別在 $x = -\frac{1}{2}$ 與 $x = 1$ 處。
(B) $(0, -1)$ 與 $(1, 0)$ 均為 $y = f(x)$ 圖形的反曲點。
(C) 方程式 $f(x) = -2$ 沒有實數解。
(D) 若方程式 $f(x) = k$ 有相異兩實根，則 $k \geq 0$ 。
(E) 對於任意實數 r ，方程式 $f'(x) = r$ 恆有實數解。
2. 實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形如右，請選出正確的選項。
(A) $a > 0$ 。
(B) $b > 0$ 。
(C) $c > 0$ 。
(D) $d > 0$ 。
(E) $b^2 - 3ac > 0$ 。



3. 右圖為多項式 $f(x)$ 的函數圖形，且灰色區域面積為 2。設 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ ， $g(2) = 5$ ，請選出正確的選項。

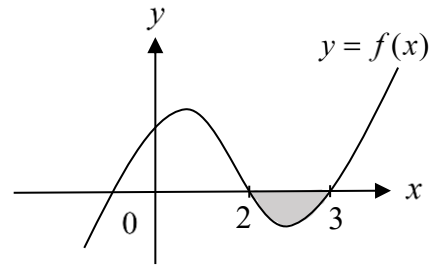
(A) $g(3) = 7$ 。

(B) $\int_2^3 f(x)dx = 2$ 。

(C) $\int_0^3 |f(x)|dx = 7$ 。

(D) $g'(3) = 3$ 。

(E) $y = g(x)$ 的圖形在 $x = 3$ 的切線方程式為 $y = 3$ 。



4. 設 $f(x)$ 為實係數多項式，且 a, b 為實數，請選出正確的選項。

(A) 若 $f'(a) = 0$ ，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 處有極值。

(B) 若 $(a, f(a))$ 為函數圖形的反曲點，則 $f''(a) = 0$ 。

(C) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 有極大值，在 $x = b$ 有極小值，則 $f(a) > f(b)$ 。

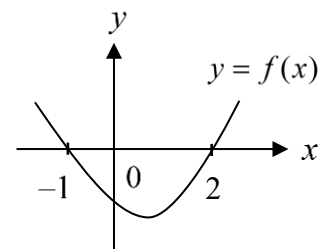
(D) 若 $f'(a) = 0$ ，且 $f(x)$ 在 $x = a$ 有極小值，則 $f''(a) > 0$ 。

(E) 若 $f''(a) = 0$ ，則 $f(x)$ 有二次因式 $(x - a)^2$ 。

三、填充題：(每題 6 分，共 30 分)

1. 實係數三次多項式 $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 的所有切線中，在 $x = 2$ 時有最小切線斜率為 -9 ，則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

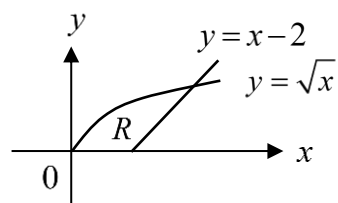
2. 如右圖，設 $y = f(x)$ 是一個實係數二次多項式，交 x 軸於 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，且與 x 軸所圍面積為 9，則定積分 $\int_0^2 f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



3. 設 $g(x) = \int_0^x (t^2 - t - 6)dt$ ，其中 $x \geq 0$ 。若當 $x = k$ 時， $g(x)$ 有最小值 $g(k)$ ，則 $(k, g(k)) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設多項式 $f(x) = 4x + k$ 及 $g(x)$ 滿足 $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 g(x)dx = 0$ ，且 $g'(x) = f(x)$ ，則 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

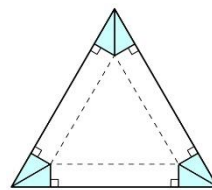
5. $y = \sqrt{x}$ 與 $y = x - 2$ 所圍成的區域 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為_____。



四、計算題：(每題 10 分，共 20 分)

1. 如右圖，在邊長為 8 的正三角形三頂點各截去兩個 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的小直角三角形，再摺成一個無蓋的三角柱容器。請問此容器的最大體積為多少？

(註：正確列出體積函數得 3 分，使用合宜的數學工具解題再得 3 分，解出正解再得 4 分。)



2. 設 $f(x)$ 是一個實係數多項式，滿足 $f(x) - 2 \int_0^2 f(x) dx - 4x^3 + 6x = 0$ ，試求：

(1) $f'(x)$ 。(3 分) (2) $\int_0^2 f(x) dx$ 。(3 分) (3) $f(x)$ 。(4 分)

臺北市立松山高中 108 學年度第二學期高三自然組期末考數學科答案卷(簡答)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、單選題：(每題 6 分，共 18 分)

1	2	3
B	C	B

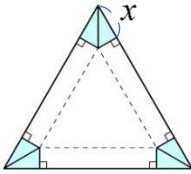
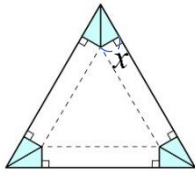
二、多選題：(每題 8 分，共 32 分。錯 1 個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，錯 3 個選項以上得 0 分)

1	2	3	4
BCE	BCE	CE	B

三、填充題：(每題 6 分，共 30 分)

1	2	3	4	5
$(-6, 3)$ 全對才給分	$-\frac{20}{3}$	$(3, -\frac{27}{2})$ 對一個給 3 分	$2x^2 - 4x + \frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}\pi$

四、計算題：(每題 10 分，共 20 分)

1	2
<p>(註：正確列出體積函數得 3 分，使用合宜的數學工具解題再得 3 分，解出正解再得 4 分。)</p> <p>i. $V(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ ($0 < x < 4$)</p>  <p>或 $V(x) = 3\sqrt{3}x^3 - 24x^2 + 16\sqrt{3}x$</p>  <p>ii. 利用微分求極值。</p> <p>iii. 最大體積為 $\frac{256}{27}$。</p>	<p>(1) $12x^2 - 6$。(3 分)</p> <p>(2) $-\frac{4}{3}$。(3 分)</p> <p>(3) $4x^3 - 6x - \frac{8}{3}$。(4 分)</p>