

台北市立松山高中 108 學年度第二學期 期末考 高二自然組數學科試題卷

一、單選題：(每題 4 分，占 20 分)

1. 設點  $P(-1000, t)$  在雙曲線  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$  上， $t > 0$ ，判斷  $t$  值最接近下列哪一個選項？

- (1) 500      (2) 600      (3) 700      (4) 800      (5) 900

2. 水星繞太陽的軌道是以太陽為焦點的橢圓，而水星軌道上之近日點與遠日點和太陽的距離比為 3:5，求此橢圓軌道的「長軸長」與「正焦弦長」的比值為何？

- (1)  $\frac{15}{14}$       (2)  $\frac{16}{15}$       (3)  $\frac{17}{16}$       (4)  $\frac{18}{17}$       (5)  $\frac{19}{18}$

3. 已知點  $P(7, 4)$ 、 $Q(2, 1)$  經過二階方陣  $A$  作線性變換後所對應的點分別為  $P'(a, b)$ 、 $Q'(c, d)$ ，

若二階方陣  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$ ，且  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$ ，則  $p+q+r+s$  的值為何？

- (1) -2      (2) -1      (3) 0      (4) 1      (5) 2

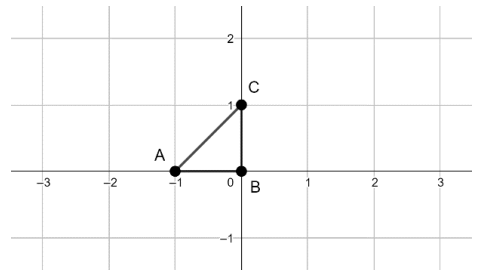
4. 已知  $M = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & -\cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 25^\circ & -\sin 25^\circ \\ \sin 25^\circ & \cos 25^\circ \end{bmatrix}$ ，求點  $P(1, 1)$  經  $M$  線性變換後所對應之點  $P'$  的坐標為何？

- (1)  $(0, \sqrt{2})$       (2)  $(\sqrt{2}, 0)$       (3)  $(1, -1)$       (4)  $(-1, -1)$       (5)  $(-1, 1)$

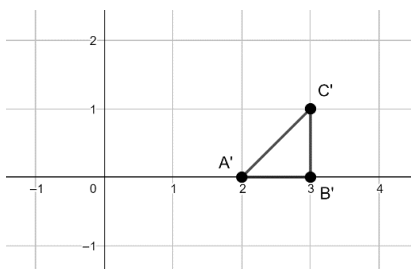
5. 如右圖，已知  $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 0)$ 、 $C(0, 1)$ ，將  $\triangle ABC$

沿  $x$  軸推移  $y$  坐標的 3 倍，試問  $\triangle ABC$  經推移後的圖形

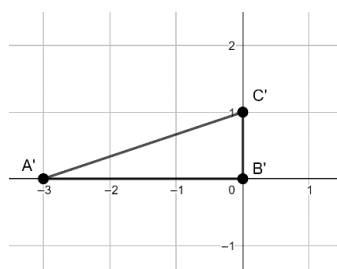
$\triangle A'B'C'$  為何？



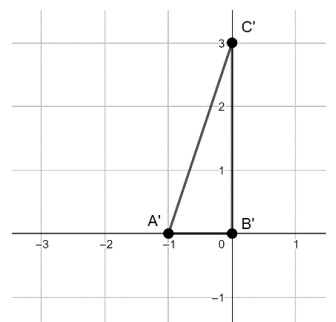
(1)



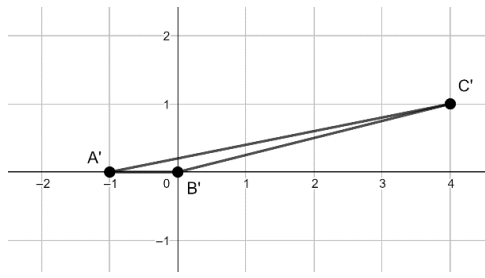
(2)



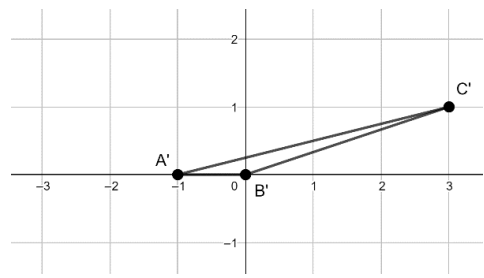
(3)



(4)



(5)

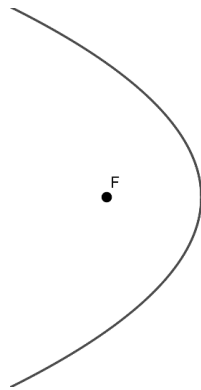


## 二、多重選擇題：

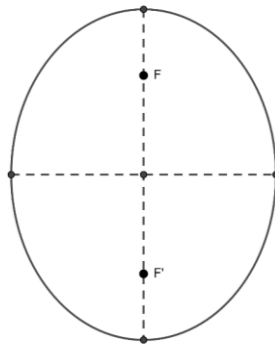
(每題 8 分，占 56 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1. 判斷下列拋物線、橢圓、雙曲線圖形中所標示的焦點位置，何者是正確的？

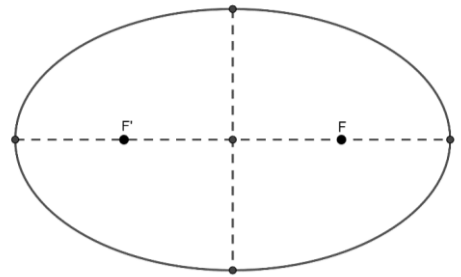
(1)



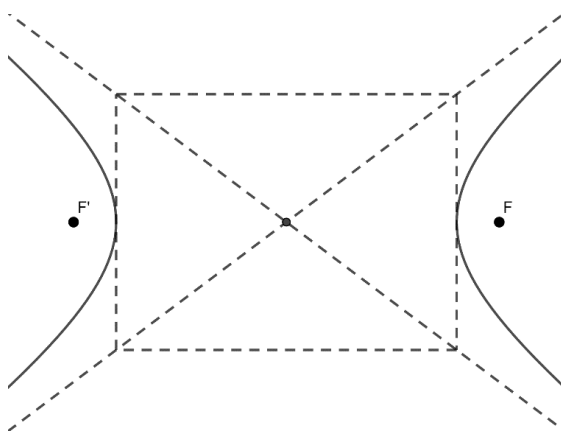
(2)



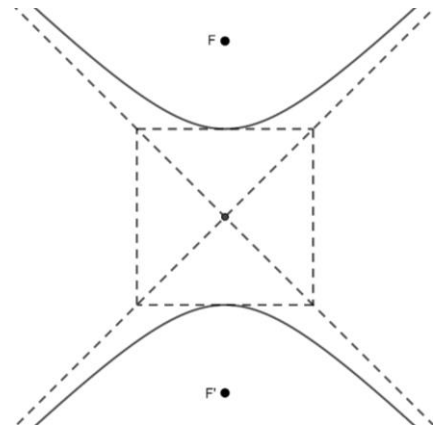
(3)



(4)



(5)



2. 先將點  $P(2,1)$  對  $y = -x$  鏡射，所對應的點為  $Q(a,b)$ ；再將  $Q(a,b)$  以原點為中心逆時針旋轉  $60^\circ$

後，所對應的點為  $R(c,d)$ 。下列敘述何者正確？

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (5) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

3. 下列二階方陣何者可以使  $\Delta ABC$  經該方陣變換後，面積保持不變？

(1)  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$       (2)  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$       (3)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$       (4)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$       (5)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

4. 在坐標平面上，設  $A(0,3)$ 、 $B(0,-3)$ ，下列敘述何者正確？

(1) 通過  $A$  點且與  $y = -3$  相切的所有圓之圓心  $P(x, y)$  的軌跡方程式為  $x^2 = 12y$

(2) 滿足  $\overline{PA} + \overline{PB} = 10$  的所有點  $P(x, y)$  的軌跡方程式為  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(3) 滿足  $\overline{PA} + \overline{PB} = 6$  的所有點  $P(x, y)$  的軌跡為線段  $\overline{AB}$

(4) 滿足  $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 6$  的所有點  $P(x, y)$  的軌跡為線段  $\overline{AB}$

(5) 滿足  $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 2$  的所有點  $P(x, y)$  的軌跡方程式為  $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$

5. 在坐標平面上，以原點  $O$  為中心，將圓  $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$  沿著  $x$  軸方向伸縮 3 倍，沿著  $y$  軸方向伸縮 2 倍，所得圖形為  $\Gamma$ ，下列敘述何者正確？

(1) 伸縮矩陣為  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$       (2)  $\Gamma$  為橢圓      (3)  $\Gamma$  的中心在  $(1, -1)$

(4)  $\Gamma$  的方程式為  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$       (5)  $\Gamma$  的方程式為  $\left(\frac{x}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{y}{2}+1\right)^2 = 1$

6. 設  $F_1$ 、 $F_2$  為  $\Gamma: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  的兩焦點，點  $P$  在  $\Gamma$  上，若  $\Delta PF_1F_2$  為等腰三角形且周長  $S$ ，則下列何者可能為  $S$  的值？

(1) 22      (2) 26      (3) 30      (4) 34      (5) 38

7. 設  $t \neq 2$  且  $t \neq 4$ ，關於方程式  $\Gamma: \frac{x^2}{4-t} + \frac{y^2}{2-t} = s$  的敘述，下列何者正確？

- (1) 若  $t < 2$  且  $s = 1$ ，則  $\Gamma$  的圖形為橢圓 (2) 若  $2 < t < 4$  且  $s = 1$ ，則  $\Gamma$  的圖形為雙曲線
- (3) 若  $t > 4$  且  $s = 1$ ，則  $\Gamma$  無圖形 (4) 若  $t = 0$  且  $s = 0$ ，則  $\Gamma$  無圖形
- (5) 若  $t = 3$  且  $s = 0$ ，則  $\Gamma$  的圖形為兩相交直線

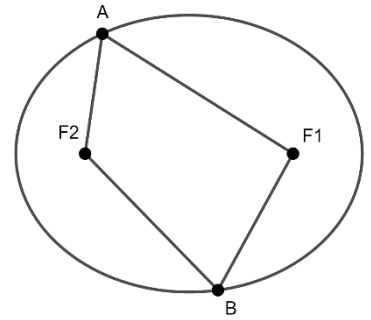
三、填充題：(每格 6 分，占 24 分)

1. 在坐標平面上，已知滿足  $|x+2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$  的所有動點  $P(x, y)$  所形成的圖形為拋物線  $\Gamma$ ，求通過點  $(5, 4)$  且與  $\Gamma$  有相同焦點、相同對稱軸的拋物線標準式為\_\_\_\_\_

(有兩解，只答對一個可得 3 分)

2. 右圖是一個以  $F_1$ 、 $F_2$  為兩焦點的橢圓， $A$ 、 $B$  為橢圓上的點，

已知  $\overline{AF_1} = 13$  且  $\overline{BF_2} - \overline{AF_2} = 4$ ，求  $\overline{BF_1}$  為\_\_\_\_\_



3. 設  $F_1$ 、 $F_2$  為橢圓  $\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$  的兩焦點，點  $P$  在橢圓上，且  $\triangle PF_1F_2$  為直角三角形，

求  $\triangle PF_1F_2$  的面積為\_\_\_\_\_ (有兩解，只答對一個可得 3 分)

4. 右圖中，圓  $C$  的圓心為原點  $O$ ，半徑為 10，

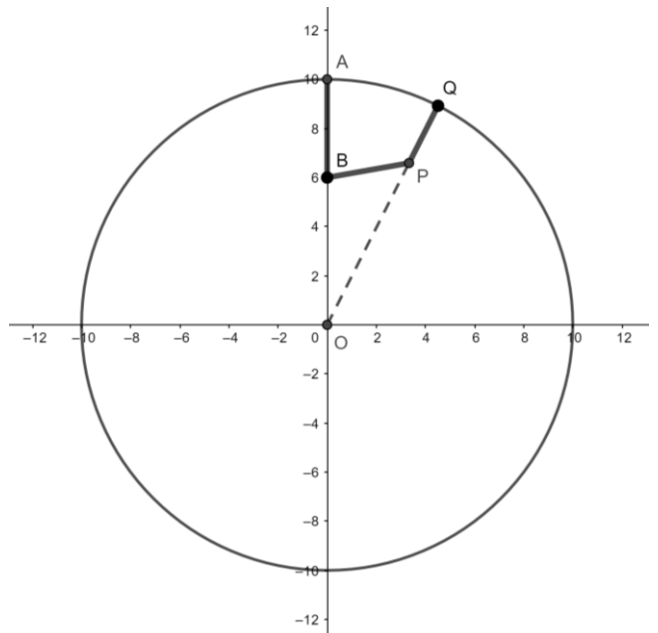
設  $A(0, 10)$ 、 $B(0, 6)$ ， $Q$  在圓  $C$  上、 $P$  在  $\overline{OQ}$  上，

且  $\overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PQ} = 10$ 。已知，當點  $Q$  在圓  $C$  上

移動時，動點  $P$  的軌跡為某圓錐曲線的部分圖形，

求此完整的圓錐曲線方程式為\_\_\_\_\_

(請以標準式作答)



台北市立松山高中 108 學年度第二學期 期末考 高二自然組數學科答案卷

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、單選題：(每題 4 分，占 20 分)

1.		2.		3.		4.		5.	
----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

二、多重選擇題：

(每題 8 分，占 56 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1.		2.		3.	
4.		5.		6.	
7.					

三、填充題：(每格 6 分，占 24 分)

1.		2.	
3.		4.	

台北市立松山高中 108 學年度第二學期 期末考 高二自然組數學科答案卷

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、單選題：(每題 4 分，占 20 分)

1.	(4)	2.	(2)	3.	(1)	4.	(3)	5.	(5)
----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----

二、多重選擇題：

(每題 8 分，占 56 分；錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或未作答得零分)

1.	(2)(4)	2.	(1)(2)(3)(4)	3.	(2)(3)(5)
4.	(1)(3)(5)	5.	(2)(5)	6.	(1)(5)
7.	(1)(2)(3)(5)				

三、填充題：(每格 6 分，占 24 分)

1.	$y^2 = 4(x-1)$ 或 $y^2 = -16(x-6)$	2.	9
3.	12 或 $\frac{12\sqrt{13}}{5}$	4.	$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$