臺北市立松山高級中學 108 學年度上學期　數學　高一第一次段考

範圍 第一冊第一章

一年____班____號姓名____________

〈題目〉

一、單選題 每題五分 共四十分

1. A 實數 $a=\sqrt{7+\sqrt{84}}$ 滿足？ (A) $4<a<5$ (B) $5<a<6$ (C) $6<a<7$ (D) $7<a<8$
2. D 下列何者是無理數？ (A) 12.1 (B) $\sqrt{121}$ (C) $1.\overline{21}$ (D) $\sqrt{1210}$
3. C $5^{-17}\times 16^{\frac{-9}{2}}$ 小數點後第幾位開始不為零？ (A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 19
4. B 滿足不等式 $4\le|2x-6|<14$ 之整數個數為？ (A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8
5. A 已知 8^{100} 與 16^{100} 各為 91 與 121 位數，則 2^{140} 為幾位數？ (A) 43 (B) 42 (C) 41 (D) 40
6. B 已知 $a=\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{4}$，$b=\dfrac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$，$c=\dfrac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{8}$，則大小關係為？
   (A) $a>b>c$ (B) $c>a>b$ (C) $c>b>a$ (D) $b>c>a$
7. D 若實數 a 滿足 $a^3+3a^2=-3a-1$，則 $|x-a|<|2x-1|$ 的解為？
   (A) $(0,2)$ (B) $(-1,3)$ (C) $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ (D) $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$
8. D 松山高中為讓高一學生發自內心體會立定自身志向、愛護共有環境、付出實際行動的精神，而有「校山巡禮」的傳統。右圖是活動宣傳海報，尺寸為 $59\times 84cm$，現在若想將其印在 $21\times 29cm$ 的 A4 紙上，則海報面積縮小倍率四捨五入至整數最大可取？ (A) 15% (B) 14% (C) 13% (D) 12%

二、填充題 每題六分 共四十二分

1. 化簡：(1) $\dfrac{8x^3+27}{2x+3}-\dfrac{8x^3-27}{2x-3}=$____$-12x$____。三分　(2) $1+3(a-1)+3(a-1)^2+(a-1)^3=$____$a^3$____。三分
2. 以區間符號表示不等式 $|1-x|-2x\le 3$ 的解為____$\left[\dfrac{-2}{3},\infty\right)$____。
3. 設 a、b 為正實數，若 $\log a=5.5$，$\log b=6.5$，則 $a+b$ 的近似值以科學記號表示為____3.476×10^6____（已知 $\log 3.16\approx 0.5$）。
4. 若 $-3\le x\le 1$，$-1\le y\le 2$，則 $(x-y)^2+xy$ 的最大值＝____19____。
5. 化簡 $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{24}}{3}}=$____$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$____。
6. 若有理數 $\dfrac{82a150}{175}$ 為有限小數，則可能的 $a=$____2、9____（答案有兩個）。
7. 設 n 是正整數，則使 1.25^n 整數部分為 10 位數的最大 n 值是____103____（已知 $\log 1.25\approx 0.0969$）。

三、計算題 每題六分 需有詳細過程 共十八分

1. 設兩正實數 x、y 滿足 $4x^2+9y^2=24$，
   (1) 求 xy 的最大值。三分　(2) $(2x+3y)^2$ 最大值成立時，x，y 分別為多少？三分
   (1) $\dfrac{4x^2+9y^2}{2}\ge\sqrt{36x^2y^2}=6xy\Rightarrow 4x^2+9y^2\ge 12xy\Rightarrow xy\le 2$。　(2) $4x^2=9y^2$ 代入 $4x^2+9y^2=24$ 得 $x=\sqrt{3}$，$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。
2. 求 $\sqrt{\left(37+6\sqrt{28}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(37-6\sqrt{28}\right)^{\frac{3}{2}}}$。

   原式 $=\sqrt{\left(\left(\sqrt{28}+3\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\left(\sqrt{28}-3\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\left(\sqrt{28}+3\right)^3-\left(\sqrt{28}-3\right)^3}$

   $=\sqrt{\sqrt{28}^3+252+27\sqrt{28}+27-\sqrt{28}^3+252-27\sqrt{28}+27}=\sqrt{558}=3\sqrt{62}$。
3. 比較 $a=8^{6^{12}}$ 與 $b=6^{12^8}$ 之大小（符號如 2^{3^4} 指 2^{81}）。

   $a=8^{6^{12}}=8^{\left(6^{12}/12^8\right)12^8}=8^{\left(\left(2^{12}3^{12}\right)/\left(2^{16}3^8\right)\right)12^8}=8^{\left((3/2)^4\right)12^8}>8^{12^8}>6^{12^8}=b$。