臺北市立松山高級中學 106 學年度第二學期高三社會組數學第一次期中考試卷

班級：_____座號：_____姓名：_________

一、單一選擇題(每題 4 分，共 12 分)

(　　)1.求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+6)(\frac{n+2}{2n+1}-1)=$ (1)0 (2)1 (3) -3 (4)3 (5)∞

(　　)2.下列數列中，何者不會趨近於 0？

(1) $\langle 0\rangle$ (2) $\langle\frac{(-1)^n}{n}\rangle$ (3) $\langle(\frac{\pi}{4})^n\rangle$ (4) $\langle(\frac{5}{3})^n\rangle$ (5) $\langle(-0.9)^n\rangle$

(　　)3.下列何者錯誤？ (1) $0.\overline{9}=1$ (2) $3.4\overline{9}=3.5$ (3) $0.\overline{2}+0.\overline{8}=0.\overline{3}+0.\overline{7}$

(4) $0.\overline{5}+0.\overline{5}=1.\overline{1}$ (5) $0.\overline{68}+0.\overline{32}=1.\overline{1}$

二、多重選擇題(每題 6 分，共 18 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個(含)以上得 0 分)

(　　)1.試選出正確的選項：

(1)若數列 $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$ 均為發散數列，則 $\langle a_n+b_n\rangle$ 為發散數列

(2)若數列 $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle a_n\div b_n\rangle$ 為收斂數列

(3)若數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂於 0，則數列 $\langle|a_n|\rangle$ 收斂於 0

(4)若數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂於 0，則數列 $\langle a_n{}^2\rangle$ 收斂於 0

(5)若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂

(　　)2.下列有關極限的運算，哪些是正確的？

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=0$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n+1}}=3$ (3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)(n+2)}=2$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+9}-\sqrt{n-6}}=\frac{2}{3}$

(5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=0$

(　　)3.下列哪些級數為收斂級數？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+2^n}{7^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

三、填充題(每格 7 分，共 56 分)

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n+1}}{2^{n-1}+3^{n+1}}=$ _____________。

2. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=$ _____________。

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{[n]}{n}=$ _____________。(註：$[n]$表不大於 n 的最大整數)

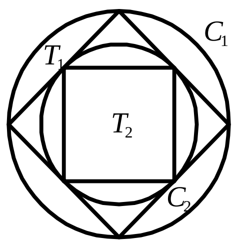
4.設 a、b 是常數，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^3+bn^2+2n+4}{3n^2+n-3}=-2$，則數對$(a，b)=$______________。

5.無窮等比級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3x+1)^n$ 收斂，試求 x 的範圍為______________。

6.已知 $<a_n>$ 為一收斂數列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n+2}{4a_n-1}=2$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______________。

7.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}=$ ______________。

8.如圖，一邊長為 10 之正方形 T_1 內接於一圓 C_1，而圓 C_2 內切於正方形 T_1；另一正方形 T_2 又內接於圓 C_2，然後圓 C_3 又內切正方形 T_2，如此做下去，求所有圓 C_1，C_2，C_3，…之面積總和 =______________。



四、計算題(共 14 分)(請標明題號、使用黑筆作答，並詳列計算過程)

1.已知無窮等比級數 $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\cdots+(-1)^{n-1}(\frac{2}{3})^n+\cdots$ 的和為 S，其前 n 項的和為 S_n，

(1)求前 n 項的和 S_n 為何？(2 分)

(2)求 S 為何？(2 分)

(3)求滿足｜$S-S_n$｜＜$\frac{1}{100}$ 的最小自然數 n 為何？（已知 $\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$）。(4 分)

2.設 $8^nx^2-2^n(2^n+1)x+1=0$ 之兩根為 α，β，n 為自然數

(1)試求兩根 α，β 為何？(2 分)

(2)令 $d_n=|\alpha-\beta|$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$ 為何？(4 分)

臺北市立松山高中 106 學年度第二學期高三社會組數學第一次期中考答案卷

使用班級	高三社會組	班級		座號		姓名		得分	

一、單一選擇題(每題 4 分，共 12 分)

1	2	3
3	4	5

二、多重選擇題(每題 6 分，共 18 分，錯一個選項得 4 分，錯二個選項得 2 分，錯三個(含)以上得 0 分)

1	2	3
34	2	235

三、填充題(每格 7 分，共 56 分)

1	2	3	4
$\frac{1}{9}$	0	1	$(0,-6)$
5	**6**	**7**	**8**
$-\frac{2}{3}<x<0$ ，$x\neq\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{5}$	2	100π

四、計算題(共 14 分)

1.

(1)$S_n=\dfrac{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$(2 分)　(2) $S=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2}{5}$ (2 分)　(3)10(4 分)

2.

(1) $\frac{1}{2^n},\frac{1}{4^n}$ (2 分)　(2) $\frac{2}{3}$ (4 分)