松山高中 105 學年度第二學期　高三　期末考　數學科（自然組）　試題卷

不可使用計算紙，利用空白處計算；請以原子筆作答於答案卷中，鉛筆作答不予計分。

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

一、　單選題（每題 6 分）

1. 已知函數 $f(x)$ 圖形如右，則 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f'(2)$ 與 $f'(3)$ 之大小關係為下列哪一選項？

（1）$f(1) > f(2) > f(3) > f'(2) > f'(3)$

（2）$f(1) > f(2) > f'(3) > f(3) > f'(2)$

（3）$f(1) > f(2) > f'(2) > f(3) > f'(3)$

（4）$f'(2) > f'(3) > f(1) > f(2) > f(3)$

2. 設 x 為一正實數，且 $f(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}\frac{1}{t^2+1}dt$，則 $f(1) =$？

（1）$\frac{1}{2}$

（2）1

（3）$\frac{3}{2}$

（4）2

3. 設有一質點 α 在實數軸上運動，其位置函數為 $f(t) = -2t^2 + 4t + 6$，$t \geq 0$（即 t 秒時質點 α 在實數軸上的坐標為 $-2t^2 + 4t + 6$）；又當質點 α 開始運動時，實數軸上另一質點 β 由坐標 14 出發，朝實數軸負向做等速度直線運動，則有關於兩質點的描述，下列何者是正確的？

（1）質點 α 通過實數軸上原點 (0) 兩次

（2）質點 α 在實數軸正向上的時間少於 2 秒

（3）$t = 1$（秒）的瞬間，質點 α 的速度為 0

（4）若質點 α 與質點 β 恰相遇一次，則質點 β 的速度為 2 單位長／秒（朝實數軸負向）

二、　多選題（每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個得 2 分，錯三個以上與未作答皆得 0 分）

4. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 2，且 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)+2}{x-3}=0$，則下列敘述哪些正確？

(1) $f(3)=-2$

(2) $f'(3)=0$

(3) 方程式 $f(x)=0$ 恰有三相異實根

(4) $f(x)$ 的反曲點為 $(1,0)$

(5) $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的圖形凹口向下

5. 設函數 $f(x)=|x^2+3x-4|+x-1$，則下列敘述哪些正確？

(1) 函數 $y=f(x)$ 的最小值為 -9

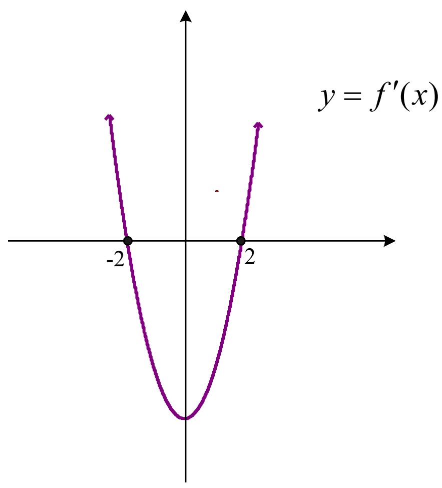
(2) 函數 $y=f(x)$ 的圖形上，存在一切線通過點 $(1,0)$

(3) 函數 $y=f(x)$ 在區間 $[-4,1]$ 的最大值為 4

(4) $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx>0$

(5) 函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成的有界區域面積為 $\int_{-4}^{1} f(x)\,dx-\int_{-5}^{-4} f(x)\,dx$

6. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，右圖為其一階導函數 $f'(x)$ 之圖形，則下列敘述哪些正確？



(1) $f(x)$ 有相對極大值，也有相對極小值

(2) $f(x)$ 在區間 $(0,2)$ 中為遞增

(3) $f(x)=0$ 有三個相異實根

(4) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心在 y 軸上

(5) 若 $x=0$ 為 $f(x)=0$ 之一實根，則 $\int_{-2}^{2} f(x)>0$

7. 有關定積分 $\int_0^{10}(2x+1)^4\,dx$ 之值與下列哪些定積分值相等？

(1) $\left[\int_0^{10}(2x+1)\,dx\right]^4$

(2) $\int_0^{10}(2x)^4\,dx+4\int_0^{10}(2x)^3\,dx+6\int_0^{10}(2x)^2\,dx+4\int_0^{10}2x\,dx+\int_0^{10}1\,dx$

(3) $\int_{10}^{0}(2x+1)^4\,dx$

(4) $\int_0^{10}(2x+1)^4\,d(2x+1)$

(5) $\frac{1}{2}\int_1^{21}t^4\,dt$

三、 選填題（每題 6 分）

A. 所謂兩曲線在點 P 相切，是指在點 P 有公切線，若拋物線 $y=-x^2+ax+b$ 在點 $A(1,1)$ 處與拋物線 $y=x^2$ 相切，則實數數對 $(a,b)=$ ＿（◯,◯◯）＿。

B. 設實係數多項函數 $f(x)=x^3\int_1^2 f(x)dx-21x^2+2x\int_1^2 f(x)dx-20$，則 $f(1)=$ ＿◯◯＿。

C. 設 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$，其中 $k\in\mathbb{R}$，若 $f(x)=0$ 有兩相異負根及一正根，則 k 值屬於開區間 ＿（◯◯，◯）＿。

D. 設直線 $L: y=2x-1$ 與三次實係數多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 $a>0$，

若點 $(1,1)$ 為 $y=f(x)$ 的反曲點，且直線 L 與 $y=f(x)$ 相交於 $(1,1)$、$(3,5)$ 兩點，

又直線 L 與 $y=f(x)$ 所圍成之區域面積為 24，則 $(a,b,c,d)=$ ＿（○,○○,○○,○）＿。

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

一、 (1) 試將方程式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ 改寫成函數 $y=f(x)$ 的形式。(4 分)

(2) 設函數 $g(x)=\sqrt{x}$（$x>0$），若 $a>0$，試以導數定義求 $g'(a)$。(4 分)

［註：若以導函數公式求值，需附上使用公式之證明，否則不予計分］

(3) 試利用上述 (1) 與 (2) 的結果，求方程式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ 的圖形中，

以 $\left(\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right)$ 為切點的切線方程式。(4 分)

二、 已知一半徑為 a（$a>0$）的上半圓之面積可用定積分表示為 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi a^2$，則

(1) 試以上述積分條件推論橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）之面積。(6 分)

(2) 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{4n^2-1^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{4n^2-2^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{4n^2-3^2}{n^4}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n^2-n^2}{n^4}}\right)$ 之值。(8 分)

松山高中105學年度第二學期　高三　期末考　數學科（自然組）　答案卷

請用原子筆作答於答案卷中，若以鉛筆作答不予計分。　　高三＿＿＿班＿＿＿號 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占74分）

一、　單選題（每題6分）

1.	2.	3.

二、　多選題（每題8分，錯一個選項得5分，錯兩個得2分，錯三個以上與未作答皆得0分）

4.	5.	6.	7.

三、　選填題（每題6分）

A.	B.	C.	D.

第貳部分：非選擇題（占26分）

一、	二、

松山高中 105 學年度第二學期　高三　期末考　數學科（自然組）　答案卷

請用原子筆作答於答案卷中，若以鉛筆作答不予計分。　高三＿＿班＿＿號 姓名＿參考解答＿

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 74 分）

四、　單選題（每題 6 分）

1.（2）	2.（2）	3.（3）

五、　多選題（每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個得 2 分，錯三個以上與未作答皆得 0 分）

4.（1）（2）（3）（4）	5.（3）（4）	6.（1）（4）	7.（2）（5）

六、　選填題（每題 6 分）

A. $(4,-2)$	B. -5	C. $(-7,0)$	D. $(3,-9,-1,8)$

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

一、

（1）

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \Rightarrow y=(3-\sqrt{x})^2=9-6\sqrt{x}+x$

（2）

$g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

$=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

（3）

由（1）與（2）的結果可知

$f'(x)=-6\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+1=\frac{-3}{\sqrt{x}}+1$

得 $f'\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{-3}{\sqrt{\frac{9}{4}}}+1=-2+1=-1$

故所求切線方程式為 $y-\frac{9}{4}=(-1)\left(x-\frac{9}{4}\right)$

即 $x+y=\frac{9}{2}$

二、

（1）

由上半橢圓方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Rightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

可得橢圓面積為 $2\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

$=2\cdot\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\left(\frac{1}{2}\pi a^2\right)=\pi ab$。

（2）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{4n^2-1^2}{n^4}}+\sqrt{\frac{4n^2-2^2}{n^4}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n^2-n^2}{n^4}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{4n^2-1^2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4n^2-2^2}{n^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n^2-n^2}{n^2}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{2^2-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$

$=\int_0^1\sqrt{2^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$

$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$